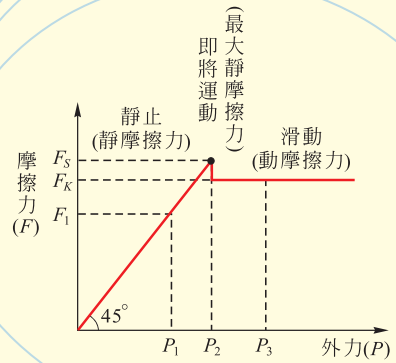


Chapter 3

摩擦



本章綱要

- 3-1 摩擦的種類
- 3-2 摩擦定律
- 3-3 摩擦角與靜止角
- 3-4 滑動摩擦與滾動摩擦
- 3-5 摩擦在機械上的運用
- 3-6 煞車來令片之摩擦
- 3-7 離合器片之摩擦
- 3-8 皮帶輪 (撓性皮帶) 之傳輸力

學習重點

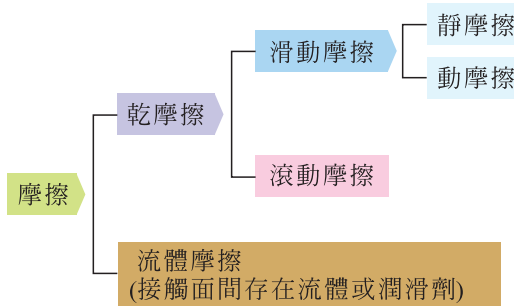
1. 摩擦之分類及摩擦之相關定律特性。
2. 由物體之運動趨勢判斷摩擦力的方向。
3. 靜止角、摩擦角、摩擦係數之定義及其間之關係。
4. 水平面及斜面之滑動摩擦問題之計算。
5. 滑動與傾倒之判斷。
6. 摩擦在機械上之應用。
7. 滾動摩擦之計算。



3-1

摩擦的種類

當兩相互接觸物體之表面，發生相對運動或此運動趨勢時，其接觸面間必有一力量產生，以阻止兩物體之運動，此力稱為摩擦力，而此種現象即稱為摩擦(Friction)。一般對摩擦之分類，可分為乾摩擦及流體摩擦兩大部分，其細分如圖 3-1 所示。



▲ 圖 3-1

本書討論範圍以乾摩擦為主，將其分述如下：

(一) 依運動方式分類

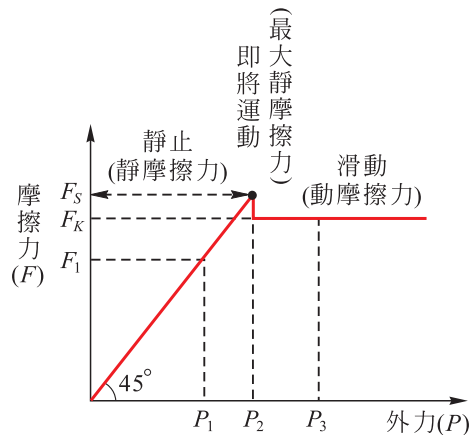
1. 滑動摩擦：物體受力後產生滑動或有滑動趨勢時，所產生之摩擦。
2. 滾動摩擦：物體在另一物體表面有滾動現象時，所生之摩擦。

(二) 依運動狀態分類

1. 靜摩擦：兩物體間產生相對滑動之趨勢，但未實際發生滑動時之摩擦現象。
2. 動摩擦：兩接觸物體發生相互滑動時，所產生之摩擦現象稱為動摩擦。

(三) 由實驗的結果，外力與滑動摩擦力之關係，如圖 3-2 所示，其說明如下：

1. 最大靜摩擦力：若物體所受外力逐漸增加，直到當物體即將運動時之摩擦力稱為最大靜摩擦力 (F_s)。
2. 若外力等於最大靜摩擦力 ($P_2 = F_s$)，此時物體即將運動。
3. 若外力小於最大靜摩擦力 ($P_1 < F_s$)，此時物體處於靜止狀態，所受之靜摩擦力 F_1 等於施加之外力 P_1 ，即 ($F_1 = P_1$)。
4. 若外力大於最大靜摩擦力 ($P_3 > F_s$)，此時物體正處於滑動中，所受之動摩擦力 F_k 小於外力 P_3 ，即 ($F_k < P_3$)。



▲ 圖 3-2 外力與滑動摩擦力之關係

3

5. 最大靜摩擦力與正壓力之比值稱為靜摩擦係數 (μ_s)，即 $\mu_s = \frac{F_S}{N}$ ；而動摩擦係數 (μ_k) 則為動摩擦力與正壓力之比值，即 $\mu_k = \frac{F_K}{N}$ 。
6. 靜摩擦係數恆大於動摩擦係數，即 $\mu_s > \mu_k$ 。
7. 靜摩擦係數與動摩擦係數皆無單位，而滾動摩擦係數與滑動之摩擦係數不同，其單位為長度之單位，如 mm、cm。

隨堂練習 ▶▶

- () 1. 重 W 之物體置於水平面上，接觸面之靜摩擦係數為 μ_s ，若物體受一水平推力，在物體靜止未達滑動之臨界點前，其摩擦力之大小 (A) 與推力相等 (B) 等於零 (C) 等於 $\mu_s W$ (D) 比推力大。
- () 2. 下列何者為滑動摩擦係數單位？ (A) 公分 (B) 公斤 / 公分² (C) 公斤 (D) 無單位。
- () 3. 一重 W 之物體受一水平拉力 P 的作用，則關於此物體在一靜止表面之直接接觸摩擦的敘述，下列何者正確？ (A) 當拉力 P 增大到使物體即將滑動時之摩擦力為最小 (B) 物體滑動後之摩擦力大於物體即將滑動時之摩擦力 (C) 物體滑動開始後之摩擦力逐漸增大 (D) 當物體處於平衡 (靜止) 時之摩擦力為拉力 P 。



3-2 摩擦定律

對於滑動摩擦的研究，早期法人 Amautons 曾提出一些較早的摩擦定律，其後庫倫、莫林等科學家亦提出摩擦之理論，以下將相關摩擦之定律及現象整理如下：

1. 摩擦力與垂直正壓力成正比。

即

$$F_S = \mu_S N \text{ 或 } F_K = \mu_K N \dots\dots\dots(3-1)$$

F_S ：最大靜摩擦力

F_K ：動摩擦力

μ_S ：靜摩擦係數

μ_K ：動摩擦係數

N ：正壓力

2. 摩擦力及摩擦係數與接觸面積大小無關。
3. 摩擦力之方向與物體運動方向相反。
4. 最大靜摩擦力大於動摩擦力。
5. 一般而言，接觸面愈粗糙則摩擦係數及摩擦力愈大，摩擦係數其值介於 0 到 ∞ 之間，當摩擦係數 $\mu = 0$ 時，為完全光滑面，摩擦力通常為零，但打磨到非常光滑且清潔的兩相同金屬面，會因產生原子間鍵結合而黏合在一起，此時摩擦係數 μ 趨向無限大。
6. 物體間之滑動速率不大時，摩擦力與速率無關。若滑動速率大於某限度後，則摩擦力會隨速率之增加而減少。
7. 一般溫度之變化對摩擦的影響甚小。

隨堂練習 ▶▶

- () 1. 下列敘述何者正確？ (A) 物體運動速度愈大，摩擦力愈大 (B) 摩擦力與接觸面之正壓力成反比 (C) 摩擦係數 μ 的範圍為 $0 < \mu < \infty$ (D) 接觸面積愈大，摩擦力愈大。
- () 2. 摩擦力方向與運動方向 (A) 同向 (B) 相反 (C) 不一定 (D) 垂直。
- () 3. 有關摩擦性質，下列敘述何者正確？ (A) 摩擦力與接觸面之正壓力成正比 (B) 摩擦力與接觸面積成正比 (C) 車輛於低速行駛時，輪胎所受的摩擦力與速率成正比 (D) 動摩擦係數必大於靜摩擦係數。



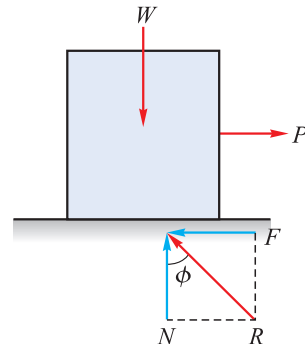
3-3 摩擦角與靜止角

一、摩擦角 (Angle of friction)

1. 靜摩擦角：如圖 3-3 所示，一物體於平面上，受一拉力 P 作用，若摩擦力 $F = F_s$ (最大靜摩擦力)，且 R 為 F_s 與正壓力 N 之合力，則 R 與 N 之交角 ϕ 稱為靜摩擦角，其正切函數值稱為靜摩擦係數，即

$$\mu_s = \tan \phi。$$

2. 動摩擦角：如圖 3-3 所示，若物體處於滑動中，此時摩擦力 $F = F_k$ (動摩擦力)，且 R 為 F_k 與正壓力 N 之合力，則 R 與 N 之交角 ϕ 即為動摩擦角，其正切函數值為動摩擦係數，即 $\mu_k = \tan \phi。$



▲ 圖 3-3 摩擦角

3

二、靜止角 (Angle of repose)

如圖 3-4 所示，一物體靜置於斜面上，若斜面之傾斜角度逐漸增加，直到角度為 θ 時，恰使斜面物體開始往下滑動，則此 θ 角即稱為靜止角。

由平衡方程式

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_s - W \sin \theta = 0 \quad F_s = W \sin \theta \cdots \cdots \textcircled{1}$$

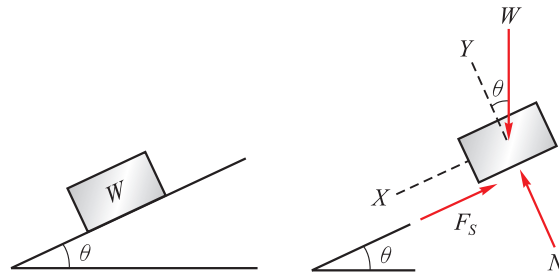
$$\Sigma F_y = 0 \quad N - W \cos \theta = 0 \quad N = W \cos \theta \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① ÷ ② 得

$$\frac{F_s}{N} = \frac{W \sin \theta}{W \cos \theta} = \tan \theta$$

$$\text{因 } \mu_s = \frac{F_s}{N} \quad \text{故 } \mu_s = \tan \theta$$

由以上關係式得知，靜摩擦係數等於靜止角 θ 之正切值，又因 $\mu_s = \tan \phi$ 可知靜摩擦角 ϕ 等於靜止角 θ 。



▲ 圖 3-4 靜止角

隨堂練習 ▶▶

- () 1. 兩接觸物體互相滑動時，其摩擦係數 μ 與摩擦角 θ 之關係為
(A) $\mu = \cos \theta$ (B) $\mu = \sin \theta$ (C) $\mu = \cot \theta$ (D) $\mu = \tan \theta$ 。
- () 2. 一物體置於水平板面上，當板面傾斜至 30° 時，物體開始下滑，則物體與平板間之靜摩擦係數為 (A) 0.5 (B) 0.577 (C) 0.866 (D) 1.732。
- () 3. 下列有關摩擦的敘述何者錯誤？ (A) 靜止角和靜摩擦角常不相等 (B) 最大靜摩擦力一定時，物體與接觸面間之正壓力愈大，其靜摩擦角愈小 (C) 靜摩擦係數等於靜摩擦角之正切值 (D) 動摩擦力等於動摩擦係數乘以正壓力。

3-4 滑動摩擦與滾動摩擦

一、滑動摩擦

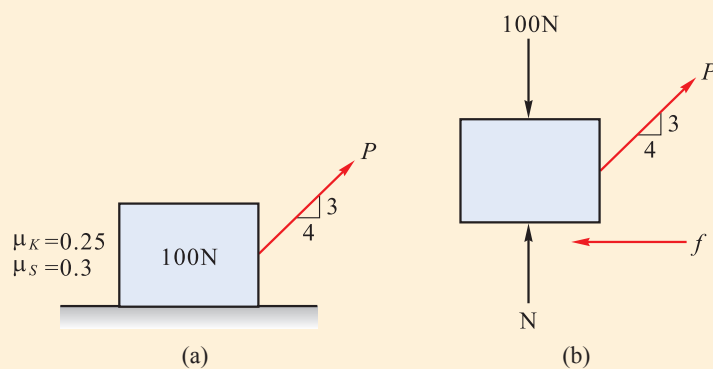
物體受力後產生滑動或有滑動趨勢時，所產生之摩擦統稱為滑動摩擦，有關滑動摩擦的問題，以下就水平面及斜面上兩種情形分別討論之。



(一) 物體在水平面上之滑動摩擦

**例題 3-1**

如圖 3-5(a) 所示，一物體重 100N 靜置於水平面上，其接觸面之靜摩擦係數 $\mu_s = 0.3$ ，動摩擦係數 $\mu_k = 0.25$ ，若作用力為 P ，當：(1) $P = 20\text{N}$ ；(2) $P = 40\text{N}$ 分別求出摩擦力。



▲ 圖 3-5

解

如圖 3-5(b) 自由體圖

(1) $P = 20\text{N}$

$$P_x = 20 \times \frac{4}{5} = 16\text{N} (\rightarrow)$$

$$P_y = 20 \times \frac{3}{5} = 12\text{N} (\uparrow)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N - 100 + 12 = 0 \Rightarrow N = 88\text{N}$$

$$\text{最大靜摩擦力 } F_s = \mu_s N = 0.3 \times 88\text{N} = 26.4\text{N} > P_x$$

故物體靜止，摩擦力 $f = P_x = 16\text{N}$ (2) $P = 40\text{N}$

$$P_x = 40 \times \frac{4}{5} = 32\text{N} (\rightarrow)$$

$$P_y = 40 \times \frac{3}{5} = 24\text{N} (\uparrow)$$



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N - 100 + 24 = 0$$

$$N = 76\text{N}$$

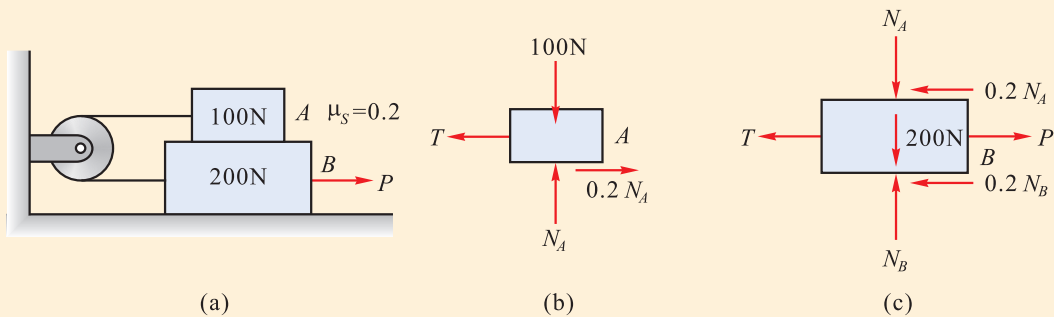
$$F_s = 0.3 \times 76 = 22.8\text{N} < P_x$$

故物體在滑動狀態，摩擦力 f 等於動摩擦力

$$F_k = \mu_k N = 0.25 \times 76 = 19\text{N}$$

**例題 3-2**

如圖 3-6(a) 所示，忽略繩索與滑輪之摩擦，其餘接觸面之靜摩擦係數 $\mu_s = 0.2$ ，則 P 力至少多大才可使物體移動？



▲ 圖 3-6

解

圖 3-6(b) : $\Sigma F_y = 0$, $N_A = 100\text{N}$

$$\Sigma F_x = 0$$
 , $T = 0.2 \times 100 = 20\text{N}$

圖 3-6(c) : $\Sigma F_y = 0$, $N_B = 100 + 200 = 300\text{N}$

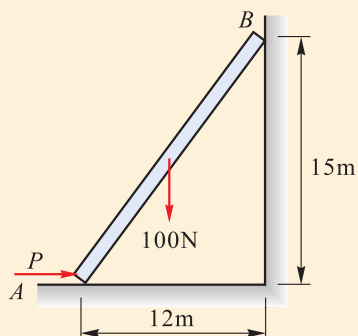
$$\Sigma F_x = 0$$
 , $P = T + 0.2N_A + 0.2N_B$

$$P = 20 + 0.2 \times 100 + 0.2 \times 300 = 100\text{N}$$



例題 3-3

如圖 3-7 所示，梯子重 100N，梯子與地板之靜摩擦係數為 0.4，梯子與牆壁之靜摩擦係數為 0.25，求欲使梯子開始向右運動，所需 P 力之大小？



▲ 圖 3-7

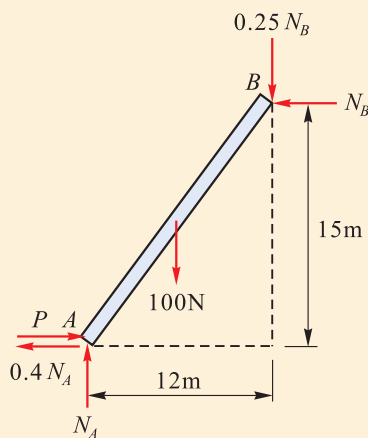
解

取梯子畫自由體圖，如下圖：

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0, 15N_B - 0.25N_B \times 12 - 100 \times 6 = 0, N_B = 50\text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0, N_A = 0.25 \times 50 + 100 = 112.5\text{N}$$

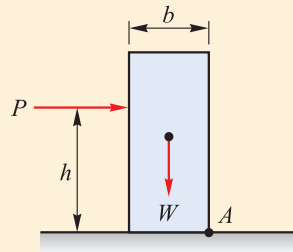
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0, P = 50 + 0.4 \times 112.5 = 95\text{N}$$





例題 3-4

如圖 3-8 所示之均質長方塊，其重量為 W ，寬為 b ，該物體與地面間之靜摩擦係數為 μ ，若此物體受到 P 力之作用，則發生滑動而不致傾倒之最大 h 值為多少？



▲ 圖 3-8

解

解一：

$$\Sigma F_x = 0, P = f = \mu N = \mu W$$

如右圖，若物體將傾倒時，正壓力 N 之位置會落在 A 點，並以順時針方向傾倒。

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0$$

$$W \times \frac{b}{2} - P \times h = 0$$

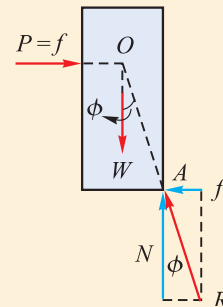
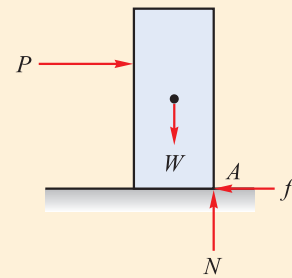
$$W \times \frac{b}{2} - \mu W h = 0$$

$$h = \frac{b}{2\mu}$$

解二：

如右圖，若物體將傾倒時，反作用力 R (f 與 N 之合力) 會落在 A 點，此時， P 、 W 、 R 三力平衡，力之作用線必交於 O 點。

$$\tan \phi = \frac{b}{2h}, h = \frac{b}{2\mu}$$

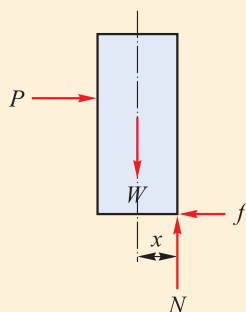




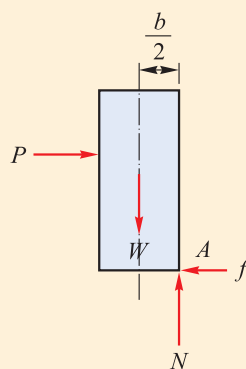
說明：

1. 如下圖當物體即將滑動時， $P = f = \mu N$ ，正壓力 N 之位置會落於 x ，此時

$$0 \leq x \leq \frac{b}{2}。$$



2. 如下圖當物體即將傾倒時，正壓力 N 之位置會落於 A 點，此時 $x = \frac{b}{2}$ ，且 $P = f \leq \mu N$ ，施力 P 對 A 點之傾倒力矩 P_h ，等於物體重 W 所產生之穩定力矩 $W \times \frac{b}{2}$ 。



3. 若 P 值由零漸漸增加，欲判斷先滑動或傾倒，必須依說明 1. 及 2.，分別計算其所需水平力 P 值之大小，較小之情況會先發生。



(二) 物體在斜面上之滑動摩擦



例題 3-5

如圖 3-9 所示，假設物體與斜面間之靜摩擦係數為 0.25，忽略繩索與滑輪間的摩擦力，試求使 400N 重的物體不沿斜面上、下滑動的 W 範圍？



▲ 圖 3-9

解

如右圖所示
物體即將上滑時，
摩擦力為 f_1 (↙)

$$\Sigma F_x = 0,$$

$$W = f_1 + 400 \times \frac{4}{5}$$

$$W = 0.25 \times 240 + 400 \times \frac{4}{5}$$

$$W = 380\text{N}$$

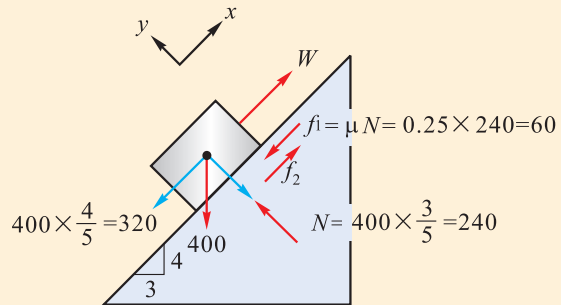
物體即將下滑時，摩擦力為 f_2 (↗)

$$\Sigma F_x = 0, W + f_2 - 400 \times \frac{4}{5} = 0$$

$$W + 0.25 \times 240 - 400 \times \frac{4}{5} = 0$$

$$W = 260\text{N}$$

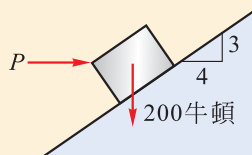
故當 $260\text{N} \leq W \leq 380\text{N}$ 時，物體靜止不動。





例題 3-6

如圖 3-10 所示，物體重 200 牛頓置於斜面上，靜摩擦係數為 0.25，則需水平力 P 為多少時，方能使物體往斜面上推升？



▲ 圖 3-10

解

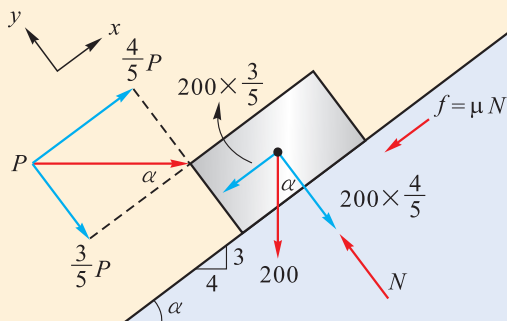
如下圖所示

$$\Sigma F_y = 0, N - 200 \times \frac{4}{5} - \frac{3}{5}P = 0 \cdots \cdots (1)$$

$$\Sigma F_x = 0, \frac{4}{5}P - 200 \times \frac{3}{5} - \mu N = 0$$

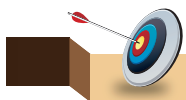
$$\frac{4}{5}P - 200 \times \frac{3}{5} - 0.25N = 0 \cdots \cdots (2)$$

由 (1)(2) 解聯立， $P \doteq 246.1$ 牛頓



二、滾動摩擦

圓柱或滾輪，在水平面上滾動時，因接觸表面變形而阻礙滾動，此種阻力並非切線方向的摩擦力，與一般之滑動現象不同，稱之為滾動摩擦力。

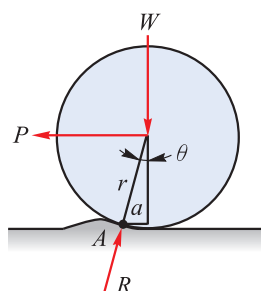


如圖3-11所示，圓柱重 W ，受一水平驅動力 P 作用於其中心，使圓柱作等速滾動，假設分布在變形接觸面的不均勻力為 R 並作用於 A 點。

則對 A 點取力矩之平衡方程式為：

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0, P(r \cos \theta) - Wa = 0$$

$$P = \frac{Wa}{r} \quad (\text{由於變形量比半徑小很多，故 } \theta \text{ 接近於零，} \cos \theta \doteq 1)$$



▲ 圖 3-11

式中， r 為 P 之力臂， a/r 之比值稱為滾動阻力係數 (coefficient of rolling resistance)，一般以 μ_r 表示之。而距離 a 稱為滾動摩擦係數 (coefficient of rolling friction)，其單位為長度如 mm 或 in，影響 a 之大小的因素很多，如接觸面性質、滾動速度等。



例題 3-7

一重 1000N，直徑為 1m 之壓路滾，若滾動摩擦係數 $a = 0.25\text{cm}$ ，試求拉動此壓路滾至少需力多少？

解

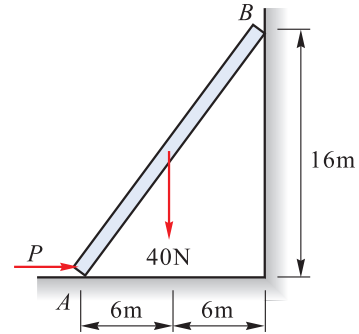
$$D = 1\text{m}, r = 50\text{cm}$$

$$P = \frac{Wa}{r} = \frac{1000 \times 0.25}{50} = 5\text{N}$$

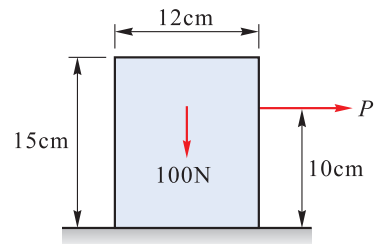


隨堂練習 ▶▶

- () 1. 如右圖所示之梯子重為 40N ， B 端與牆壁之接觸面為光滑， A 端與地板間之摩擦係數為 0.4 ，求欲使梯子向右移動，所須之最小 P 力
(A) 11N (B) 21N (C) 31N (D) 41N 。

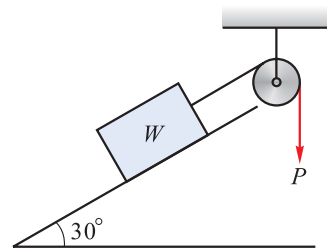


- () 2. 如右圖所示之均質物重 100N ，接觸面靜摩擦係數為 0.2 ，當 P 由小逐漸加大時，下列選項何者正確？



- (A) 當 $P = 15\text{N}$ 時，物體先開始發生傾倒，但不會滑動
(B) 當 $P = 15\text{N}$ 時，物體先開始發生滑動，但不會傾倒
(C) 當 $P = 20\text{N}$ 時，物體先開始發生傾倒，但不會滑動
(D) 當 $P = 20\text{N}$ 時，物體先開始發生滑動，但不會傾倒。

- () 3. 如右圖所示物體重 $W = 100\text{N}$ 置於 30° 之斜面上，接觸面之靜摩擦係數 0.2 ，當繩之拉力 $P = 42\text{N}$ 時，物體與斜面間之摩擦力為多少？
(A) 8N (B) 16N (C) 18N (D) 28N 。

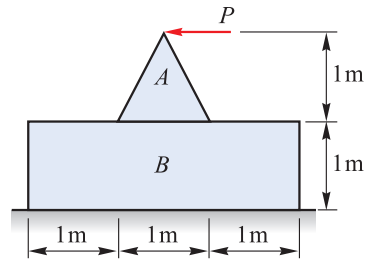


- () 4. 下列何者是滾動摩擦係數之單位？
(A) 無單位 (B) 公斤 / 公分² (C) 公斤
(D) 公分。

- () 5. 重 1000N 、直徑為 50cm 之壓路滾，用 72N 之力即可推動此壓路滾，試求其滾動摩擦係數為 (A) 1.4 cm (B) 1.6 cm (C) 1.8 cm (D) 2.0 cm 。



- () 6. 如右圖所示，三角形 A 重 20N 放置於 10N 之矩形塊 B 表面上，若所有接觸面之靜摩擦係數 $\mu_s = 0.3$ ，試求物體不產生運動時，水平力 P 之最大值為多少？
 (A) 3N (B) 6N (C) 9N (D) 21N 。



3-5 摩擦在機械上的運用

一般機械設計上大多以減少摩擦來提高機械效率，但在某些機構中卻是利用摩擦效應來發揮機件之功能，如汽車之煞車、離合器、皮帶輪之傳輸力等，皆將於後面章節介紹之，以下先就機械上如尖劈、螺旋之摩擦應用作介紹。

一、尖劈之摩擦應用

以三角形之尖物，施力作用嵌入物體，利用斜面摩擦及橫向推力，來升起並維持重物高度或擴裂物體者稱為尖劈或楔，例如以楔來調整重物之位置或以斧頭劈柴，使木材擴裂，皆為典型實例。

如圖 3-12，設所有接觸面摩擦係數相等， R_1 為木材加於尖劈 AB 斜面之總反作用力， R_2 為 BC 斜面之總反作用力， N_1 、 N_2 分別為 R_1 、 R_2 之水平分力， P_1 、 P_2 分別為 R_1 、 R_2 之垂直分力， $\phi = \tan^{-1}\mu$ 為摩擦角。

$$\Sigma F_x = 0, N_1 = N_2 \cdots \cdots \text{①}$$

$$\Sigma F_y = 0, P = P_1 + P_2 \cdots \cdots \text{②}$$

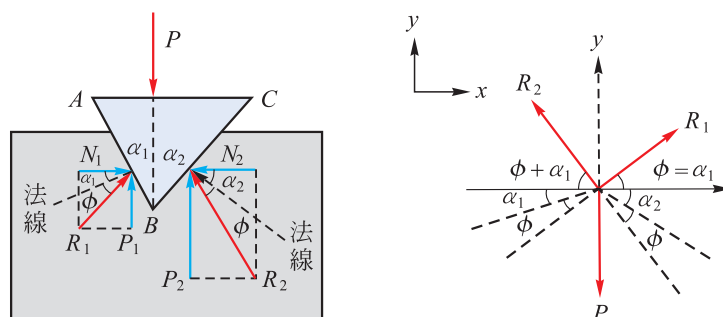
$$\text{又 } P_1 = N_1 \tan(\phi + \alpha_1) \cdots \cdots \text{③}$$

$$P_2 = N_2 \tan(\phi + \alpha_2)$$

由①，②，③知

$$P = N_1 [\tan(\phi + \alpha_1) + \tan(\phi + \alpha_2)]$$

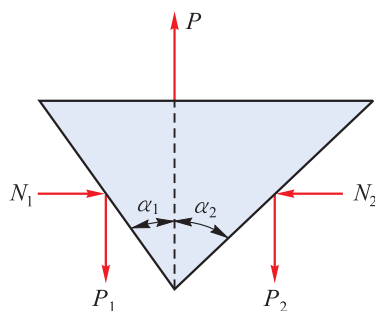
式中 P 為尖劈之施力， N_1 、 N_2 為擴裂物所受之橫向推力。



▲ 圖 3-12

如圖 3-13 所示，劈入後取出尖劈，其所需之力量為 P ，同理可求得為

$$P = N_1[\tan(\phi - \alpha_1) + \tan(\phi - \alpha_2)]$$



▲ 圖 3-13

討論：

1. 劈入時， α_1 、 α_2 愈小， P 值愈小，劈入時愈省力。
2. 取出尖劈時， α_1 、 α_2 愈小，斧頭愈不易取出。
3. 若 $\phi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ 時， $P = 0$ ， $\phi < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ 時， $P < 0$ 不需施力，即可將尖劈取出，但工程上不適用。

$$\therefore [\tan(\phi - \alpha_1) + \tan(\phi - \alpha_2)] = 0$$

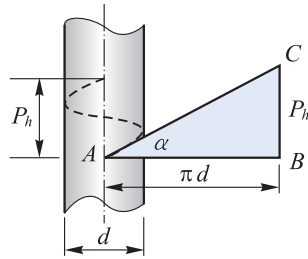
$$\phi - \alpha_1 = -(\phi - \alpha_2)$$

$$\phi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$



二、螺旋之摩擦應用

螺旋 (Screw) 原理乃斜面之應用，在機械上用途甚廣，可用來傳輸動力或固定機件等。螺紋為捲繞於圓柱之斜面，如圖 3-14 所示，展開後形成三角形 ABC ，現以螺旋起重機之實例說明之。



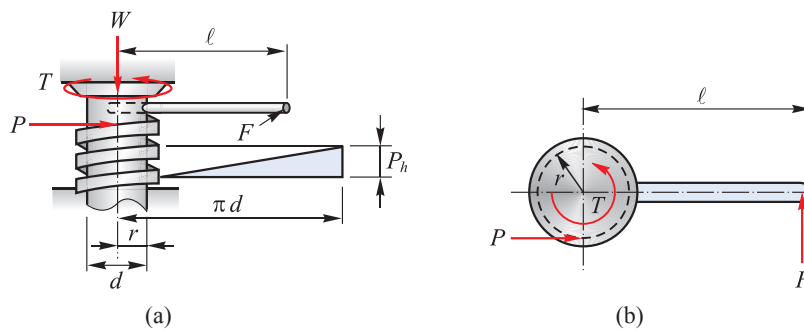
▲ 圖 3-14

$$\tan\alpha = \frac{P_h}{\pi d} \dots\dots\dots(3-2)$$

- P_h : 螺距 (pitch)
- α : 導程角 (傾斜角)
- d : 圓柱之直徑

螺旋起重機：

其運作方式如圖 3-15 所示，於 ℓ 長之把手施一水平力 F ，螺旋起重機因 F 力產生之迴轉力矩 T ，使重物 W 上升。由此迴轉力矩 T ，可透過力矩原理求出實際作用於螺紋之水平推力 P ， P 力乃沿水平並與螺桿相切作用於螺紋上，故其如同沿斜面將 W 之重物上推。



▲ 圖 3-15



使重物上升，螺紋所受之水平推力 P 為：

$$\Sigma F_y = N - P \sin \alpha - W \cos \alpha = 0$$

$$\therefore N = P \sin \alpha + W \cos \alpha$$

$$\Sigma F_x = P \cos \alpha - W \sin \alpha - f = 0$$

$$P \cos \alpha - W \sin \alpha - \mu_s (P \sin \alpha + W \cos \alpha) = 0$$

$$\therefore P (\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha) = W (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)$$

$$\therefore P = \frac{W (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha} = \frac{W \left(\frac{\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)}{\frac{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{W (\tan \alpha + \mu_s)}{1 - \mu_s \tan \alpha}$$

螺紋面之摩擦係數： $\mu_s = \tan \phi$ 代入上式

$$\therefore P = \frac{W (\tan \alpha + \tan \phi)}{1 - \tan \phi \cdot \tan \alpha}$$

$$P = W \cdot \tan(\phi + \alpha)$$

$$P = W \tan(\phi + \alpha)$$

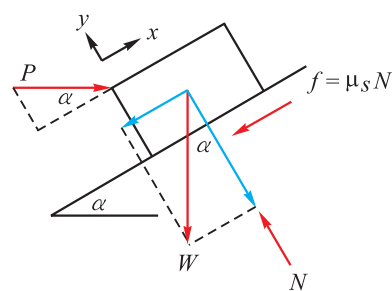
$$= W \frac{\tan \phi + \tan \alpha}{1 - \tan \phi \tan \alpha} = W \times \frac{\mu_s \pi d + P_h}{\pi d - \mu_s P_h} \dots \dots \dots (3-3)$$

其中 $\tan \phi = \mu_s$ (螺紋面之摩擦係數)， $\tan \alpha = \frac{P_h}{\pi d}$ ， $f = \mu_s N$ (為螺紋受之摩擦力)

同理可證，使重物下降螺紋受之水平推力 P 為：

$$P = W \tan(\phi - \alpha)$$

$$= W \frac{\tan \phi - \tan \alpha}{1 + \tan \phi \tan \alpha} = W \times \frac{\mu_s \pi d - P_h}{\pi d + \mu_s P_h} \dots \dots \dots (3-4)$$





如圖 3-15(b)，升降重物所需之力 F 為：

$$T = F\ell = Pr$$

$$F = \frac{Pd}{2\ell} \dots\dots\dots(3-5)$$

T ：起重機之迴轉力矩

ℓ ：槓桿長

r ：螺桿半徑

F ：槓桿端水平作用力

d ：節徑

討論：

1. 當 $\phi + \alpha = 90^\circ$ ，則 $\tan \phi \cdot \tan \alpha = 1$ ，即 $\tan \alpha = \frac{1}{\tan \phi} = \frac{1}{\mu_s}$ 時， $P = \infty$ ；此時無論施力多大，螺旋沒有升高重物作用。
2. 當 $\phi \leq \alpha$ 時， $\tan(\phi - \alpha) \leq 0$ ，即 $P \leq 0$ ；此時需加一水平上推之力防止螺桿逆轉，否則螺旋起重機會自然迴轉下降。
3. $\tan \alpha \geq \mu_s (\tan \phi)$ 時，螺旋起重機會自然迴轉降下重物。
4. $\tan \alpha \leq \mu_s (\tan \phi)$ 時，須施加外力，才能迴轉降下重物。



例題 3-8

如圖 3-16 所示，一螺旋千斤頂，螺旋直徑 5cm，螺距 1.2cm， $\mu_s = 0.1$ ，把手長 80cm，若以力 10N 迴轉把手，可升起重物多少 N？

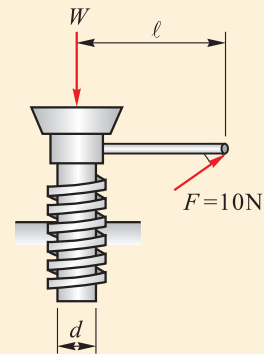
解

$$P = \frac{2F\ell}{d} = \frac{2 \times 10 \times 80}{5} = 320\text{N}$$

$$\text{由 } P = W \times \frac{\mu_s \pi d + P_h}{\pi d - \mu_s P_h}$$

$$320 = W \times \frac{0.1 \times 3.14 \times 5 + 1.2}{3.14 \times 5 - 0.1 \times 1.2}$$

$$\therefore W \doteq 1800\text{N 可升起重物 } 1800\text{ N}$$

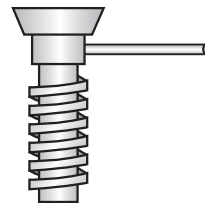


▲ 圖 3-16



隨堂練習 ▶▶

如右圖所示，一螺旋千斤頂，螺旋直徑 6 mm，螺距 2.5 mm， $\mu_s = 0.1$ ，把手長 8 cm，求施力應為多少，方可使 1000 N 之重物下降？



3

3-6 煞車來令片之摩擦

煞車來令片裝置於煞車蹄片上，煞車作用時與煞車鼓或煞車碟盤接觸產生摩擦，因摩擦力的作用而產生煞車效果。煞車來令片與煞車鼓或碟盤間的摩擦力，其關係式如下：

$$F_b = \mu N \dots\dots\dots(3-6)$$

F_b ：煞車來令片之摩擦力

μ ：煞車來令片與煞車鼓或碟盤間的摩擦係數

N ：煞車來令片對煞車鼓或碟盤之正壓力



例題 3-9

如圖 3-17 所示，碟式煞車之來令片對碟盤之正壓力為 1200N，摩擦係數 $\mu = 0.25$ ，試求

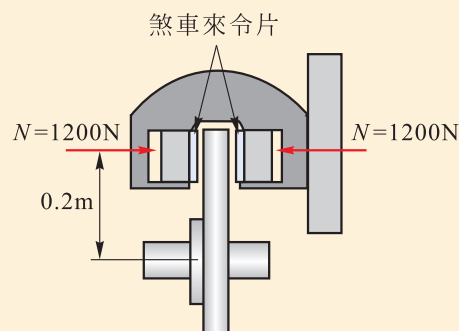
- (1) 煞車來令片之煞車力為多少？
- (2) 煞車來令片對碟盤之煞車扭矩為多少？

解

兩塊來令片之煞車力

$$F_b = 2\mu N = 2 \times 0.25 \times 1200 = 600\text{N}$$

$$\text{煞車扭矩 } T = 600 \times 0.2 = 120\text{N}\cdot\text{m}$$



▲ 圖 3-17



3-7 離合器片之摩擦

摩擦式離合器乃利用離合器片接觸面之摩擦力，來作扭力傳遞作用，其可依使用者需要，適時將動力接合或分離，常用於汽機車排檔變速系統。

如圖 3-18，摩擦式離合器之傳動扭矩等於摩擦力乘以迴轉半徑，其關係式如下：

$$T = F \frac{D_m}{2} = \mu N \frac{D+d}{4} \dots\dots\dots(3-7)$$

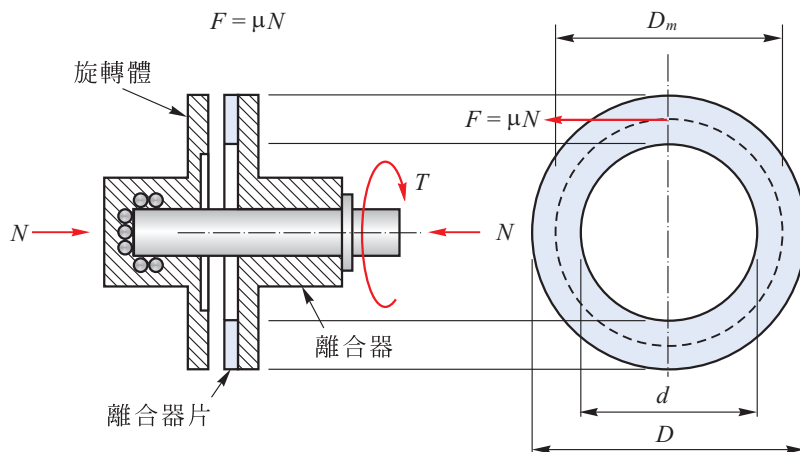
T ：傳動扭矩

μ ：摩擦係數

F ：接觸面之摩擦力 ($F = \mu N$ ， N 為接觸面之正壓力)

(摩擦力平均作用於離合器片上，方向與傳動扭矩 T 之方向相同，在此以一集中力 F 代替之。)

D_m ：離合器片之平均直徑 ($D_m = \frac{D+d}{2}$ ， D 、 d 為離合器片之外徑與內徑)

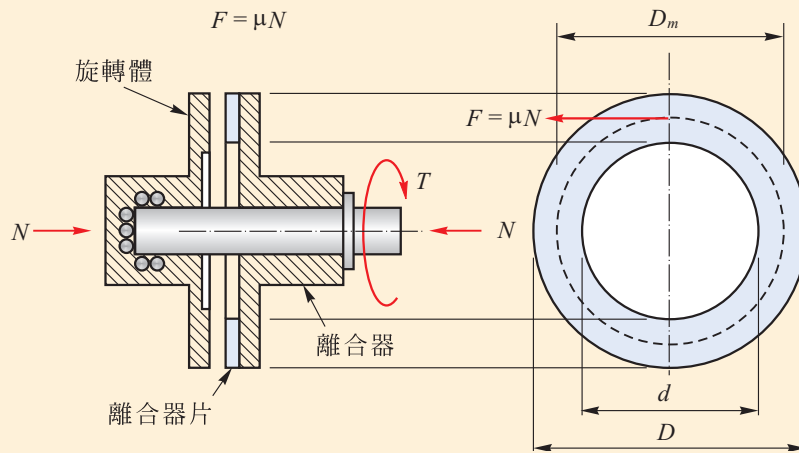


▲ 圖 3-18



例題 3-10

如圖 3-19 所示，圓盤式單面摩擦離合器， $D = 120 \text{ mm}$ ， $d = 80 \text{ mm}$ ，接觸面之正壓力 $N = 1800 \text{ N}$ ，摩擦係數 0.2 ，求傳動扭矩為多少？



▲ 圖 3-19

解

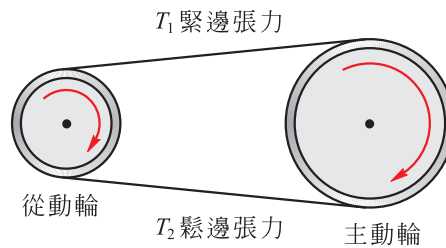
$$T = F \frac{D_m}{2} = \mu N \frac{D+d}{4}$$

$$\begin{aligned} T &= 0.2 \times 1800 \times \frac{120+80}{4} \\ &= 18000 \text{ N}\cdot\text{mm} \\ &= 18 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$



3-8 皮帶輪 (撓性皮帶) 之傳輸力

如圖 3-20 所示，當兩軸之間距離較長遠，不適合使用齒輪或摩擦輪，且速比不要求絕對精準時，常採用皮帶輪傳動較為恰當。此種藉皮帶摩擦效應以傳達動力之方式，在機械上之應用甚為廣泛。



▲ 圖 3-20

若皮帶與滑輪間沒有摩擦力存在，則皮帶在滑輪兩邊之拉力相等，動力無從傳達。當皮帶輪轉動，且皮帶與帶輪間存在摩擦力時，皮帶兩端拉力不等，其拉力差值稱為有效挽力，即為皮帶與帶輪之總摩擦力。

皮帶張力與摩擦係數及接觸角之關係如下：

$$T_0 = \frac{1}{2} (T_1 + T_2), T_1 > T_0 > T_2$$

$$T_e = T_1 - T_2 \dots \dots \dots (3-8)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\alpha} \dots \dots \dots (3-9)$$

T_0 ：初張力 (皮帶輪靜止時，繞掛皮帶之張力)

T_e ：有效挽力

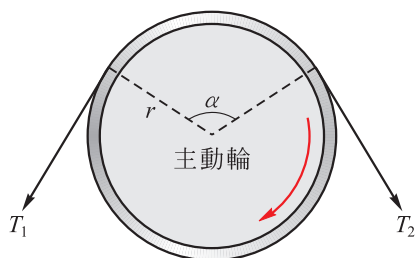
T_1 ：緊邊張力

T_2 ：鬆邊張力

e ：自然對數之底，其值為 2.71828

μ ：皮帶與帶輪之摩擦係數

α ：皮帶與帶輪之接觸角 (單位：rad)



▲ 圖 3-21

**例題 3-11**

有一皮帶傳動系統，其皮帶與皮帶輪間的摩擦係數為 0.3，當緊邊張力為 300N 時，鬆邊張力為 120N；則當鬆邊張力為 240N 時，緊邊張力為多少？

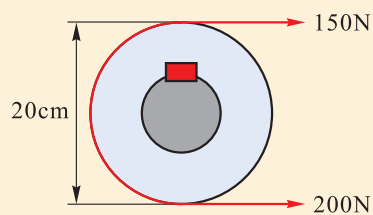
解 $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta}$, $\frac{300}{120} = \frac{T_1}{240}$, $T_1 = 600\text{N}$

3

**例題 3-12**

如圖 3-22 所示，有一皮帶輪固定於轉軸上，試求此軸所產生之扭矩為多少？

解 $T = Fr = (T_1 - T_2)r$
 $T = (200 - 150) \times 10$
 $= 500\text{N}\cdot\text{cm}$
 $= 5\text{N}\cdot\text{m}$

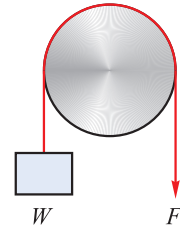


▲ 圖 3-22

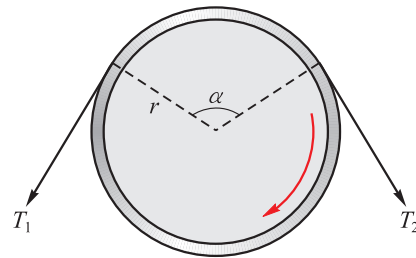


隨堂練習

- () 1. 如右圖所示，皮帶與皮帶盤之靜摩擦係數 $\mu_s = 0.1$ ，重物 $W = 100\text{N}$ ，如欲使重物 W 不致滑下，試求施力 F 至少為？
(A) $50e^\pi \text{ N}$ (B) $100e^{0.1\pi} \text{ N}$ (C) $\frac{100}{e^{0.1\pi}} \text{ N}$ (D) 50 N 。



- () 2. 如右圖所示之從動皮帶輪， T_1 及 T_2 為皮帶輪之拉力， α 為接觸角， μ 為摩擦係數，若輪係順時針方向迴轉，則
(A) $T_1 = T_2 e^{\mu/\alpha}$ (B) $T_1 = T_2 e^{\mu\alpha}$
(C) $T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}$ (D) $T_2 = T_1 e^{\mu/\alpha}$ 。

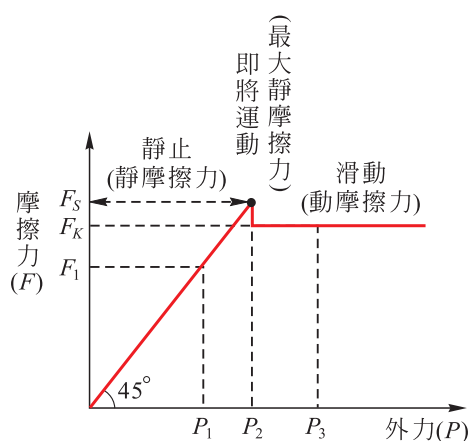




重點整理

3-1

1. 外力與滑動摩擦力之關係，如下圖。



外力與滑動摩擦力之關係

- (1) 最大靜摩擦力：若物體所受外力逐漸增加，直到當物體即將運動時之摩擦力稱為最大靜摩擦力 (F_s)。
- (2) 外力等於最大靜摩擦力 ($P_2 = F_s$)，此時物體即將運動。
- (3) 若外力小於最大靜摩擦力 ($P_1 < F_s$)，此時物體處於靜止狀態，所受之靜摩擦力 F_1 等於施加之外力 P_1 ，即 ($F_1 = P_1$)。
- (4) 若外力大於最大靜摩擦力 ($P_3 > F_s$)，此時物體正處於滑動中，所受之動摩擦力 F_k 小於外力 P_3 ，即 ($F_k < P_3$)。
- (5) 最大靜摩擦力與正壓力之比值稱為靜摩擦係數 (μ_s)，即 $\mu_s = \frac{F_s}{N}$ ；而動摩擦係數 (μ_k) 則為動摩擦力與正壓力之比值，即 $\mu_k = \frac{F_k}{N}$ 。
- (6) 靜摩擦係數恆大於動摩擦係數，即 $\mu_s > \mu_k$ 。
- (7) 靜摩擦係數與動摩擦係數皆無單位，而滾動摩擦係數與滑動之摩擦係數不同，其單位為長度之單位，如 mm、cm。



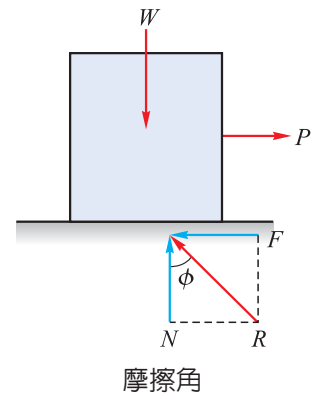
3-2

2. 摩擦之定律及現象

- (1) 摩擦力與垂直正壓力成正比。
- (2) 摩擦力及摩擦係數與接觸面積大小無關。
- (3) 摩擦力之方向與物體運動方向相反。
- (4) 最大靜摩擦力大於動摩擦力。
- (5) 摩擦係數其值介於 0 到 ∞ 之間，當摩擦係數 $\mu = 0$ 時，為完全光滑面，摩擦力通常為零。
- (6) 物體間之滑動速率不大時，摩擦力與速率無關。若滑動速率大於某限度後，則摩擦力會隨速率之增加而減少。
- (7) 一般溫度之變化對摩擦的影響甚小。

3-3

3. (1) 若摩擦力 $F = F_s$ (最大靜摩擦力)，且 R 為 F_s 與正壓力 N 之合力，則 R 與 N 之交角 ϕ 稱為靜摩擦角，其正切函數值稱為靜摩擦係數，即 $\mu_s = \tan \phi$ 。
- (2) 若物體處於滑動中，此時摩擦力 $F = F_k$ (動摩擦力)，且 R 為 F_k 與正壓力 N 之合力，則 R 與 N 之交角 ϕ 即為動摩擦角，其正切函數值為動摩擦係數，即 $\mu_k = \tan \phi$ 。



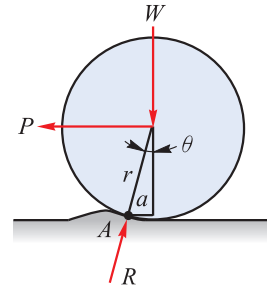
4. 一物體靜置於斜面上，若斜面之傾斜角度逐漸增加，直到角度為 θ 時，恰使斜面物體開始往下滑動，則此 θ 角即稱為靜止角。靜摩擦係數等於靜止角 θ 之正切值 $\mu_s = \tan \theta$ ，又因 $\mu_s = \tan \phi$ 可知靜摩擦角 ϕ 等於靜止角 θ 。

3-4

5. 圓柱或滾輪，在水平面上滾動時，因接觸表面變形而阻礙滾動，此種阻力並非切線方向的摩擦力，與一般之滑動現象不同，稱之為滾動摩擦力。



6. a/r 之比值稱為滾動阻力係數 (coefficient of rolling resistance)，一般以 μ_r 表示之。而距離 a 稱為滾動摩擦係數 (coefficient of rolling friction)，其單位為長度如 mm 或 in，影響 a 之大小的因素很多，如接觸面性質、滾動速度等。



3-5

7. 螺旋 (Screw) 原理乃斜面之應用。
8. 使重物上升，螺紋之水平推力 P 為：

$$P = W \tan(\phi + \alpha) = W \frac{\tan \phi + \tan \alpha}{1 - \tan \phi \tan \alpha} = W \times \frac{\mu_s \pi d + P_h}{\pi d - \mu_s P_h}$$

$$\text{其中 } \tan \phi = \mu_s, \tan \alpha = \frac{P_h}{\pi d}$$

9. 使重物下降，螺紋受之水平推力 P 為：

$$P = W \tan(\phi - \alpha) = W \frac{\tan \phi - \tan \alpha}{1 + \tan \phi \tan \alpha} = W \times \frac{\mu_s \pi d - P_h}{\pi d + \mu_s P_h}$$

3-8

10. 當兩軸之間距離較長遠，不適合使用齒輪或摩擦輪，且速比不要求絕對精準時，常採用皮帶輪傳動較為恰當。
11. 皮帶張力與摩擦係數及接觸角之關係如下：

$$(1) T_0 = \frac{1}{2} (T_1 + T_2), T_1 > T_0 > T_2$$

$$(2) T_e = T_1 - T_2$$

$$(3) \frac{T_1}{T_2} = e^{\mu \alpha}$$

T_0 ：初張力 (皮帶輪靜止時，繞掛皮帶之張力)

T_e ：有效挽力

T_1 ：緊邊張力

T_2 ：鬆邊張力

e ：自然對數之底，其值為 2.71828

μ ：皮帶與帶輪之摩擦係數

α ：皮帶與帶輪之接觸角 (單位：rad)



學後評量

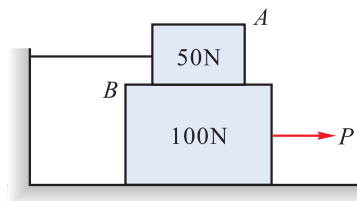
- 3-1** () 1. 兩物體之間，由滑動摩擦改為滾動摩擦，對摩擦力有什麼影響？
(A) 變大 (B) 變小 (C) 不變 (D) 不一定。
- () 2. 摩擦的知識以及摩擦係數是依據那一項而得？ (A) 實驗 (B) 畫自由體圖 (C) 材料分析 (D) 純力學理論分析。
- () 3. 當一物體放置於水平面上，並受水平拉力 P 作用，在發生運動前，物體與水平面間摩擦力之大小，與拉力 P 之大小 (A) 始終為定值 (B) 沒有關係 (C) 成正比 (D) 成反比。
- () 4. 一物體重 W 置於靜摩擦係數 μ 的水平面上，若不受其它外力作用，則此時桌面作用於物體之摩擦力為多少？ (A) μW (B) 0 (C) $\frac{N}{\mu}$ (D) μN 。
- () 5. 一物體靜置於一平面上，以一力將物體拉動，則接觸面間產生之最大靜摩擦力係發生於 (A) 物體在開始運動之瞬間 (B) 物體呈靜止狀態時 (C) 物體呈等速度運動狀態時 (D) 物體呈加速度運動狀態時。
- 3-2** () 6. 下列敘述何者錯誤？ (A) 兩接觸物體間，動摩擦恆比最大靜摩擦小 (B) 兩接觸物體間之接觸面愈粗糙，摩擦係數愈大 (C) 最大靜摩擦與接觸面正壓力之比，稱為靜摩擦係數 (D) 靜摩擦係數與物體間接觸面大小成正比。
- () 7. 摩擦係數 (μ) 之值為 (A) $0 < \mu < \infty$ (B) $1 < \mu < \infty$ (C) $0 \leq \mu \leq 1$ (D) $0 < \mu < 1$ 。
- () 8. 摩擦力之方向 (A) 恆與重力之方向相同 (B) 恆與重力之方向相反 (C) 恆與物體運動方向相同 (D) 恆與物體運動方向相反。
- 3-3** () 9. 靜摩擦係數等於摩擦角之 (A) 正弦值 (B) 餘弦值 (C) 正切值 (D) 餘切值。
- () 10. 若一物體置於一斜面上，測得靜止角為 45° ，請問靜摩擦係數為多少？
(A) 0.414 (B) 0.707 (C) 0.866 (D) 1。



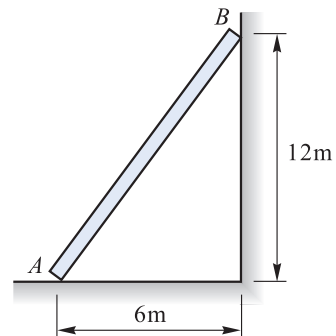
- () 11. 物體置於一平板上，若將此平板一端緩緩升起，當平板之傾斜角為 30° 時，物體開始滑落，請問物體與平板間的摩擦係數為 (A)1.732 (B)1.414 (C)0.866 (D)0.577。
- () 12. 下列有關摩擦性質的敘述，何者正確？ (A) 摩擦角 ϕ 之正切值等於摩擦係數 μ ，即 $\tan \phi = \mu$ (B) 摩擦係數 μ 之範圍為 $0 < \mu < 1$ (C) 兩物體接觸面間，摩擦力與正壓力成反比 (D) 最大靜摩擦力小於動摩擦力。

3-4

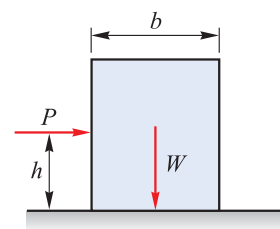
- () 13. 如右圖所示，若各接觸面靜摩擦係數 $\mu_s = 0.2$ ， A 物體重 50N ，以一水平繩繫在牆上， B 物體重 100N 放置在平面上。試求使 B 物體向右滑動，拉力 P 至少為多少？ (A)20N (B)40N (C)60N (D)80N。



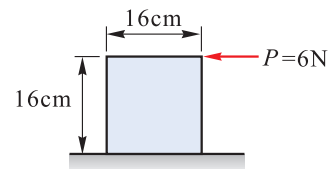
- () 14. 如右圖所示，一桿重 100N ， B 端置於光滑牆上， A 端置於 $\mu_s = 0.27$ 之地面，求 A 之摩擦力為多少？ (A)10N (B)15N (C)20N (D)25N。



- () 15. 如右圖所示，一物體，寬 $b = 3.5\text{cm}$ ，重 $W = 20\text{N}$ ，與地面之靜摩擦係數 $\mu_s = 0.25$ ，以一水平力 P 推動物體滑動，求作用力 P 之最大高度 h 為多少？ (A)1m (B)3m (C)5m (D)7m。



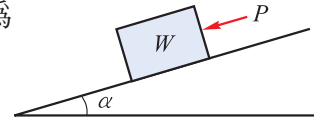
- () 16. 如右圖所示，物體重 10N ，與接觸面之最大靜摩擦係數為 0.2 ，受外力 6N 作用，則物體會 (A) 向左滑動 (B) 靜止不動 (C) 原地打轉 (D) 向左傾倒。



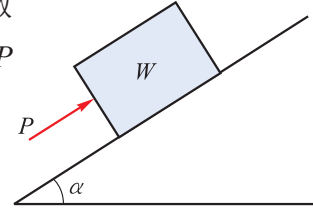
3



- () 17. 如右圖所示，一物重 W 與平板間之靜摩擦係數為 μ_s ，則當物體開始滑下滑時， $P =$
 (A) $W(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ (B) $W(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$
 (C) $W(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$ (D) $W(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)$ 。



- () 18. 如右圖所示一物重 W ，若接觸面間之靜摩擦係數為 μ_s ，使物體沿斜面上滑，則所需的最小力 P 為
 (A) $(\mu_s \sin \alpha + \cos \alpha)$
 (B) $W(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha)$
 (C) $W(\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)$
 (D) $W(\mu_s \sin \alpha - \cos \alpha)$ 。



- () 19. 一與水平成 θ 的斜面上置放一重 W 的物體，物體受一與斜面平行之向上推力 P 作用。假設 θ 、 W 及物體與斜面間之摩擦係數 μ 均為已知，則
 (A) 當物體即將向上滑動時，推力 $P = W \cos \theta - \mu W \sin \theta$
 (B) 當物體即將向下滑動時，推力 $P = W \cos \theta - \mu W \sin \theta$
 (C) 當物體即將向上滑動時，推力 $P = W \sin \theta + \mu W \cos \theta$
 (D) 當物體即將向下滑動時，推力 $P = W \sin \theta + \mu W \cos \theta$ 。

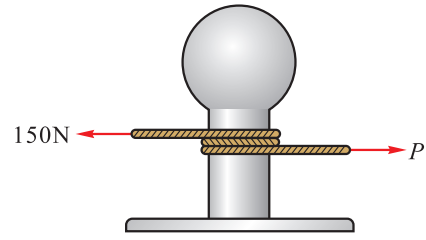
3-5

- () 20. 螺旋之導角為 α ，螺桿直徑為 d ，螺距為 P ，則三者之關係式為
 (A) $\sin \alpha = \frac{P_h}{\pi d}$ (B) $\cos \alpha = \frac{P_h}{\pi d}$ (C) $\tan \alpha = \frac{P_h}{\pi d}$ (D) $\sec \alpha = \frac{P_h}{\pi d}$ 。
- () 21. 在設計螺旋千斤頂時，為避免螺桿自然迴轉而下降，必須使螺旋角 α 和靜摩擦角 ϕ 滿足下列何式？ (A) $\alpha = \phi$ (B) $\alpha > \phi$ (C) $\alpha = 0$
 (D) $\alpha > \phi$ (E) $\alpha < \phi$ 。
- () 22. 欲使尖劈不易拔出，則頂角 θ 與摩擦角 ϕ 之關係為 (A) $2\theta < \phi$
 (B) $\theta < 2\phi$ (C) $\frac{\theta}{3} < \phi$ (D) $3\theta < \phi$ 。
- () 23. 螺旋乃利用 (A) 槓桿 (B) 滑輪 (C) 摩擦 (D) 斜面 原理。

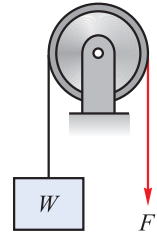


3-8

- () 24. 如圖所示，有一條繩索在絞盤上整整繞了兩圈，摩擦係數為 0.5，欲拉動 150N 之最小 P 力為多少？
 (A) $150 e^{-2\pi}$ (B) $150 e^{\pi}$
 (C) $150 e^{2\pi}$ (D) $150 e^{-2\pi}$ 。



- () 25. 如圖所示之定滑輪，考慮繩與滑輪間之摩擦阻力時，欲維持物體剛好不下滑情況，則施力大小 (F) 關係為
 (A) $F = W$ (B) $F > W$ (C) $F + W = 0$ (D) $F < W$ 。



3

二、計算題

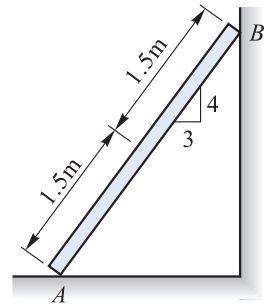
3-3

1. 一物體重 100 N 置於一平板上，將板子一端往上漸漸升高，直到與水平面夾角 45° 時，物體開始往下滑，試求板子傾斜 37° 時，至少需施力多少方能使物體下滑？

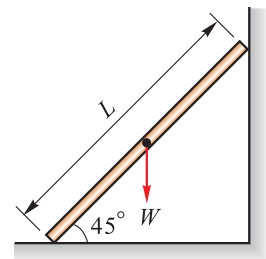
3-4

2. 將一 30N 物體置於傾斜 30° 的斜面上，該物體恰能作等速度運動，則物體與斜面間的動摩擦係數為？

3. 如右圖所示，有一質量 10kg，長 3m 的樓梯，斜靠在一光滑的直立牆上，當質量 45kg 的人爬至距 A 點 1m 處，樓梯開始下滑，試求樓梯與地面間之摩擦係數約為多少？

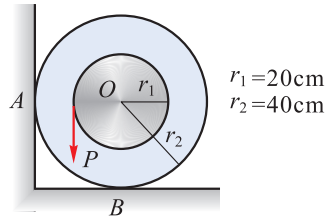


4. 如右圖所示，梯子重 W 斜靠於牆壁，當梯與水平之傾斜角為 45° 時，將沿牆壁滑下，若壁與地面之摩擦係數相同，試求其摩擦係數。

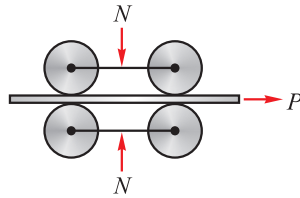




5. 如圖所示，輪軸重 1200N，牆面為光滑，圓柱與地面間之摩擦係數為 0.2，若不使圓柱體轉動，則 P 不得超過多少 N？

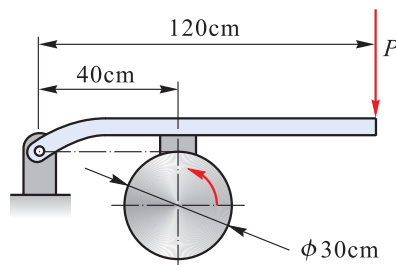


6. 物體重 100N 靜止於傾斜 30° 角之斜板上，若接處面之靜摩擦係數為 0.68，試求其與斜板間之摩擦力大小為多少？
7. 如圖所示，將一鋼板穿過四個相同之滾子， N 為 500N，滾子直徑為 2cm，若滾動摩擦係數為 0.02cm，則 P 至少須多少公斤鋼板方能穿越？



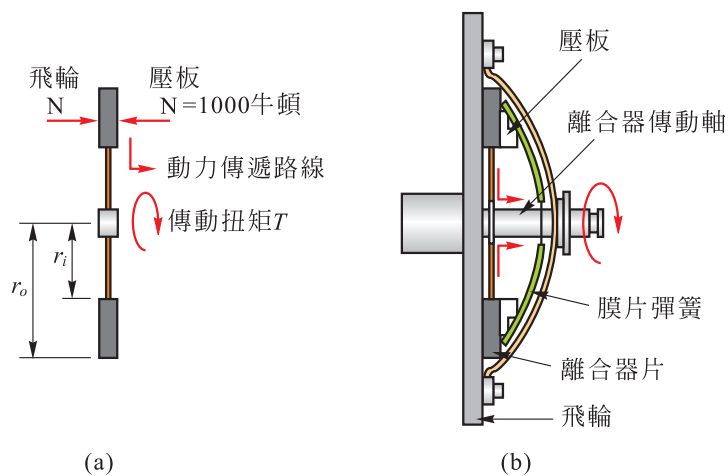
3-6

8. 如圖所示，塊狀制動器，已知輪徑為 30cm，摩擦係數為 0.2，欲產生 1800N-cm 之制動扭矩，則所需之力量 P 為多少 N？





- 3-7 9. 如圖 (a)(b) 所示，圓盤式雙面摩擦離合器片，摩擦係數 0.2，內徑 12cm ($r_i = 6\text{cm}$)、外徑 16cm ($r_o = 8\text{cm}$)，若壓板之正壓力為 1000N，試求傳動扭矩 T 。



3

- 3-8 10. 如圖所示，帶輪上之皮帶支持重為 100N 之物體，若接觸面之靜摩擦係數為 0.24，接觸角為 90° ，求 (1) 支持該重物靜止不下滑之最小拉力為多少？ (2) 使物體向上之最小拉力為多少？

