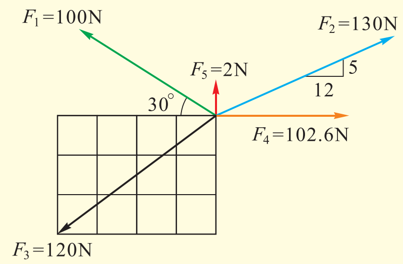
Chapter 2

同平面力系



本章綱要

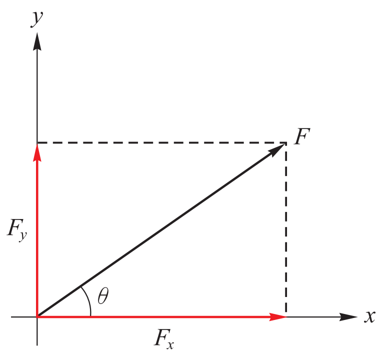
學習重點

1. 力的分解與合成之意義及其計算方法。
2. 自由體圖之繪法。
3. 力矩、力偶之定義、特性及其計算。
4. 同平面各種力系之合成及利用平衡方程式解力系之平衡問題。
5. 二力平衡、三力平衡之特性及解法。
6. 樑支承反力之計算。

2-1 力的分解與合成

一、力的分解

將作用於物體上之一單力，以適當的方法，分解成兩個或兩個以上的力，而不 a 影響物體外效應，此種方法稱爲力之分解。所分解後之諸力，稱爲分力。一個單力若無任何條件限制，可以分解成無數個分力，一般力學分析中，爲了運算方便，通常將力分解爲互相垂直的兩分力 F_x與 F_y，如圖 2-1 所示：



▲ 圖 2-1　力的分解

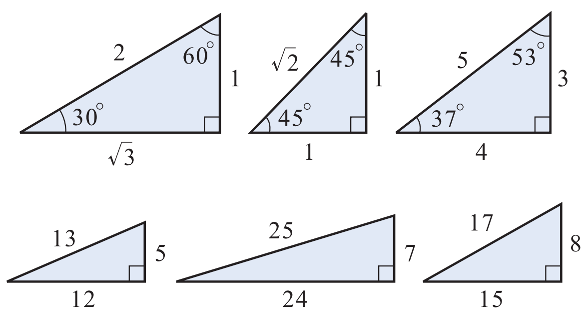
即

$$F_x = F\cos\theta\ (\text{水平軸 } x \text{ 方向分力})$$

$$F_y = F\sin\theta\ (\text{垂直軸 } y \text{ 方向分力}) \cdots\cdots (2\text{-}1)$$

式中 θ 爲 F 力與 x 軸之夾角。[(2-1) 式不可死記，應以幾何關係式求之。]

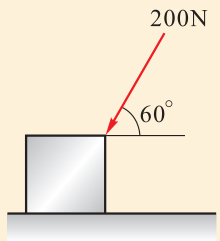
若欲將一單力分解爲已知方向的二分力，可利用三角幾何數學關係式求之，常用之三角形比例關係如圖 2-2 所示：



▲ 圖 2-2

例題 2-1

如圖 2-3 所示，有一物體置於光滑平面上受一外力 $F = 200\text{N}$ 作用，試將其分解成水平與垂直二分力？

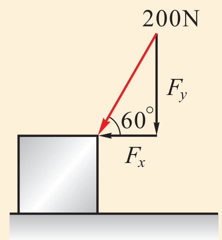


▲ 圖 2-3

解 如右圖所示

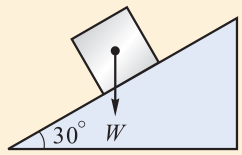
$F_x = F\cos\theta = 200\cos 60° = 100\text{N}\ (\leftarrow)$

$F_y = F\sin\theta = 200\sin 60° = 100\sqrt{3}\ \text{N}\ (\downarrow)$



例題 2-2

如圖 2-4 所示，一物重 $W = 100\text{N}$，試將其分解爲沿斜面之分力 W_x 與垂直斜面之分力 W_y。

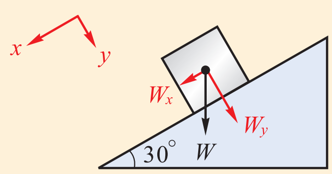


▲ 圖 2-4

解 如右圖所示

$W_x = W\sin 30° = 100\sin 30° = 50\text{N}\ (\swarrow)$

$W_y = W\cos 30° = 100\cos 30° = 86.6\text{N}\ (\searrow)$



例題 2-3

如圖 2-5 所示，一單力 $P = 50\text{N}$，試將其分解爲沿斜面之分力 P_x 與垂直斜面之分力 P_y。

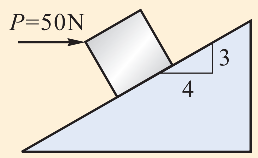
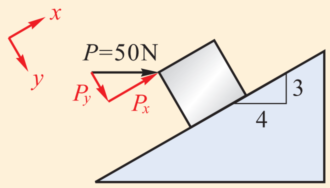


圖 2-5

解　如右圖所示

$$P_x = P\times\frac{4}{5} = 50\times\frac{4}{5} = 40\text{N}\ (\nearrow)$$

$$P_y = P\times\frac{3}{5} = 50\times\frac{3}{5} = 30\text{N}\ (\searrow)$$



二、力的合成

將作用於物體上的力系合併成爲一單力，而不改變物體外效應之方法，稱爲力的合成，此單力稱爲合力。其合成之方法如下：

(一) 圖解法

可分爲平行四邊形法與力多邊形法兩種。

1. 平行四邊形法

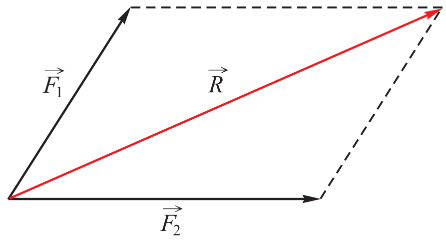
   (較適用於二共點力之合成，三力以上若採用此法過於複雜。)

   作圖方法如圖 2-6 所示：

   (1) 定適當之比例關係，如 1mm = 1N，依比例繪出二同點力 $\overrightarrow{F_1}$ 及 $\overrightarrow{F_2}$ 之向量。

   (2) 以此二力爲相鄰兩邊，作一平行四邊形。

   (3) 連接對角線，即爲所求之合力 $\overrightarrow{R}$，量取 R 的量値爲合力之大小，其箭頭指向爲合力的方向。

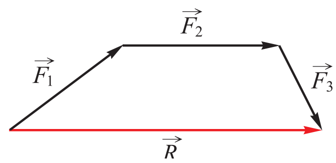


▲ 圖 2-6　平行四邊形法

2. 力多邊形法

(適用於二個以上之共點力系合成，若作二共點力之合成時，即為三角形法)

作圖方法如圖 2-7 所示：



▲ 圖 2-7　力多邊形法

(1) 定適當比例關係，如 1mm ＝ 1N，依比例繪出 $\vec{F_1}$ 、$\vec{F_2}$ 及 $\vec{F_3}$ 之向量，並使各力之作用點與前力之箭頭首尾相接。

(2) 連接第一力 $\vec{F_1}$ 之作用點與最後一力 $\vec{F_3}$ 之箭頭，即為所求之合力 $\vec{R}$，量取 $\vec{R}$ 之量值為所求合力大小，其箭頭指向為合力的方向。

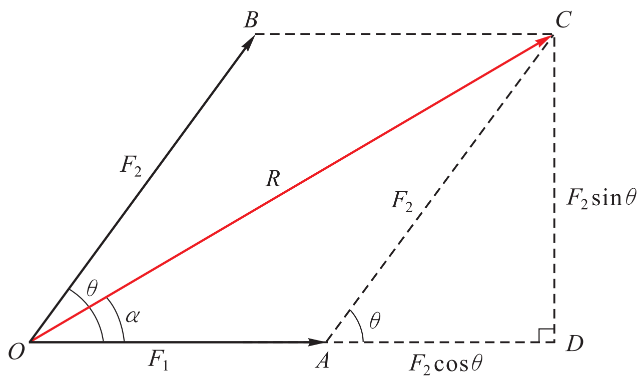
(3) 力系之合力可為一單力或零，若力多邊形閉合，即 $\vec{F_1}$ 、$\vec{F_2}$ 及 $\vec{F_3}$ 為封閉多邊形，則表示合力為零。

(4) $\vec{F_1}$ 、$\vec{F_2}$ 及 $\vec{F_3}$ 之先後次序不會影響合力之結果。

(二) 數解法

1. 以數解法求二共點力之合成

如圖 2-8 所示，已知二力大小分別為 F_1、F_2 相交於 O 點，θ 為其夾角，且 $\triangle ODC$ 為直角三角形。利用平行四邊形法所得之 $\overline{OC}$ 長為合力 R 之大小，且 $\propto$ 為 R 與 F_1 所成之夾角，即代表合力方向。



▲ 圖 2-8　兩共點力之合成

由畢氏定理求 $\overline{OC}$ 長，可得合力 R 之大小：

$$\overline{OC}^2=(\overline{OA}+\overline{AD})^2+\overline{CD}^2$$

$\because\ \overline{AD}=F_2\cos\theta$，$\overline{CD}=F_2\sin\theta$

$$\therefore R^2=(F_1+F_2\cos\theta)^2+(F_2\sin\theta)^2$$

$$=F_1^2+2F_1F_2\cos\theta+(F_2^2\cos^2\theta+F_2^2\sin^2\theta)$$

$$=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\theta$$

得

合力大小：$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\theta}$ ....(2-2)

以△ODC 之三角函數關係式求 α 角，可得合力 R 之方向：

$$\tan\alpha=\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\frac{F_2\sin\theta}{F_1+F_2\cos\theta}$$

得

合力方向：$\alpha=\tan^{-1}\dfrac{F_2\sin\theta}{F_1+F_2\cos\theta}$ ....(2-3)

α代表合力之方向，即合力 R 與 F_1所成之夾角。

($\tan^{-1}$爲反三角函數，唸法爲 arc tan，例：$\tan 45°=1$，則 $\tan^{-1}1=45°$)

二力夾角 θ 大小之討論：

(1) $\theta=0°$ 時，$\cos\theta=1$，$R=F_1+F_2$，兩力共線且方向相同，R 值最大。

(2) $\theta=90°$ 時，$\cos\theta=0$，$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$，可直接由畢氏定理求得。

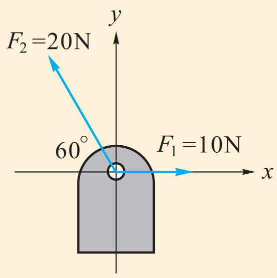
(3) $\theta=120°$ 且 $F_1=F_2$ 時，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$R=F_1=F_2$，以力多邊形法作圖時爲一正三角形。

(4) $\theta=180°$ 時，$\cos\theta=-1$，$R=F_1-F_2$，兩力共線且方向相反，R 值最小。

(5) $90°<\theta<180°$ 時，$\cos\theta$ 爲負值，計算時必須特別留意。

例題 2-4

如圖 2-9 所示，有二力 $F_1 = 10\text{N}$ 與 $F_2 = 20\text{N}$ 作用在一固定托架上，試求該二力之合力爲多少？



▲ 圖 2- 9

解

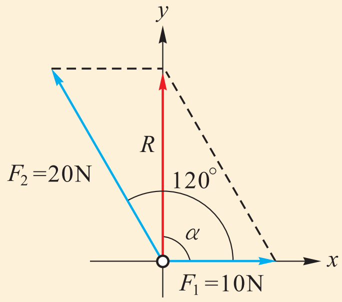
如下圖所示

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$

$$R = \sqrt{10^2 + 20^2 + 2\times10\times20\cos120^\circ} = 10\sqrt{3}\ \text{N}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta} = \tan^{-1}\frac{20\sin120^\circ}{10+20\cos120^\circ} = \tan^{-1}\frac{10\sqrt{3}}{0}\ (\infty)$$

$$\alpha = 90^\circ$$



2. 以數解法求二個以上共點力之合成

(1) 如圖 2-10 所示，將數力 F_1、F_2、F_3、F_4……分解成水平方向 (x 方向) 之分力 F_{1x}、F_{2x}、F_{3x}、F_{4x}……及垂直方向 (y方向) 之分力 F_{1y}、F_{2y}、F_{3y}、F_{4y}……

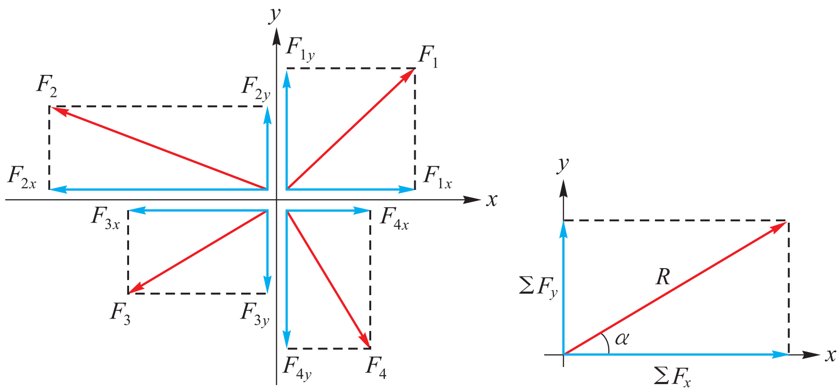


圖 2-10 二個以上共點力之合成

(2) 求 x 方向分力之總和 $\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$，此爲合力 R 在 x 方向之力 R_x。

(3) 求 y 方向分力之總和 $\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$，此爲合力 R 在 y 方向之力 R_y。

(4) 求分力總和時，應注意分力方向之正負，通常取向右爲正、向左爲負；向上爲正、向下爲負。

(5) 以畢氏定理，即可求合力之大小及方向。

合力大小：$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$ ....(2-4)

合力方向：$\alpha = \tan^{-1}\dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$ ....(2-5)

例題 2-5

如圖 2-11 所示，同平面共點力系中，求此力系之合力大小爲多少？

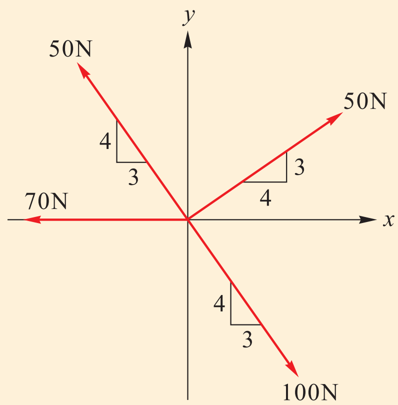


圖 2-11

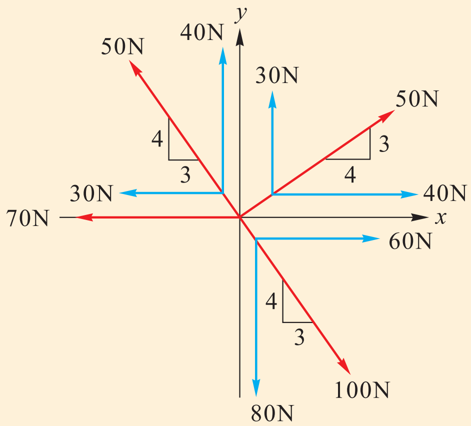
解

如下圖所示

$\xrightarrow{+} R_x = \Sigma F_x = 40 + 60 - 30 - 70 = 0\text{N}$

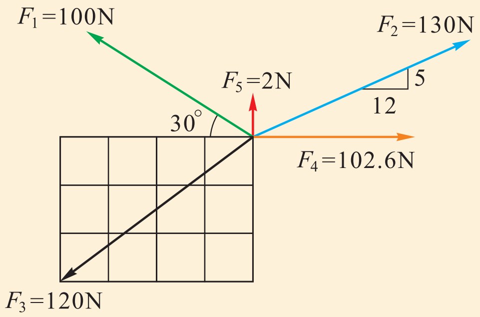
$+\uparrow R_y = \Sigma F_y = 40 + 30 - 80 = -10\text{N}$

$R = R_y = -10\text{N}\ (\downarrow)$



例題 2-6

如圖 2-12 所示，求合力大小及方向



▲ 圖 2-12

解

$F_{1x}=-100\times\cos30°=-86.6$，$F_{1y}=100\times\sin30°=50$

$F_{2x}=130\times\dfrac{12}{13}=120$，$F_{2y}=130\times\dfrac{5}{13}=50$

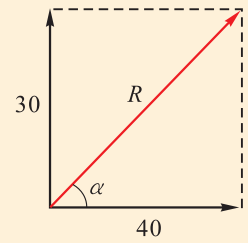
$F_{3x}=-120\times\dfrac{4}{5}=-96$，$F_{3y}=-120\times\dfrac{3}{5}=-72$

$F_{4x}=102.6$，$F_{5y}=2$

$\Sigma F_x=-86.6+120-96+102.6=40$

$\Sigma F_y=50+50-72+2=30$

如右圖所示



$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2}$

$\quad=\sqrt{40^2+30^2}=50\text{N}$

$\tan\alpha=\dfrac{30}{40}$，$\alpha=37°$

隨堂練習

( ) 1. 一力之分解，若無任何條件之限制，最多可產生多少分力？ (A) 無限多個 (B)2 個 (C)3 個 (D)4 個。

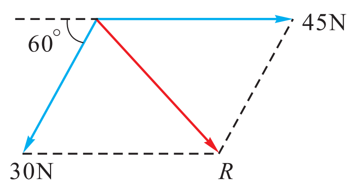
( ) 2. 同平面共點力系中，若有一水平分力為 3 牛頓，且合力為 5 牛頓，則垂直分力為 (A)3 牛頓 (B)4 牛頓 (C)5 牛頓 (D)6 牛頓。

( ) 3. 已知兩力 F_1和 F_2 交於一點，夾角為 θ，則其合力大小為

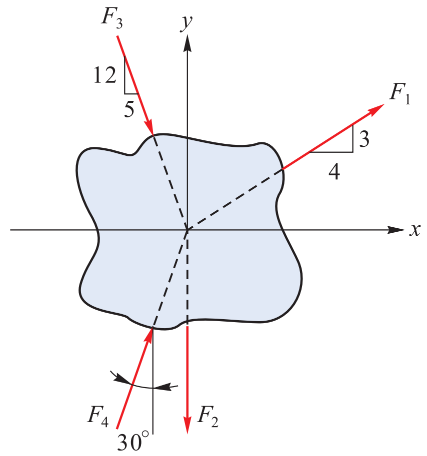
(A) $\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\sin\theta}$ (B) $\sqrt{F_1^2+F_2^2}$ (C) $\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\theta}$

(D) $\sqrt{F_1^2\cos\theta+F_2^2\sin\theta+F_2^2}$ 。

( ) 4. 如下圖所示，一 45N 的力水平向右，另一 30N 之力與水平成 60° 向左下方作用，求其合力之大小為 (A)15N (B)40N (C)65N (D)75N。



( ) 5. 如下圖所示，物體受到 F_1 = 200 N，F_2 = 150 N，F_3 = 390 N 及 F_4 = 100 N 的負荷作用，求 x 軸方向上的合力大小為多少 N？ (A)180 (B)360 (C)510 (D)840。

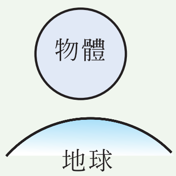
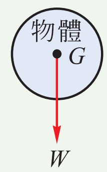
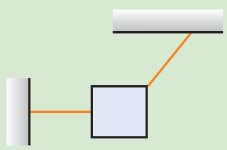
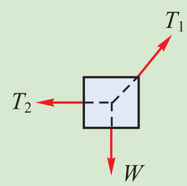
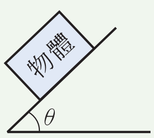
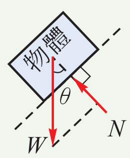
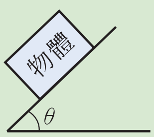
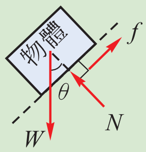
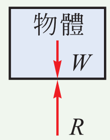


2-2 自由體圖

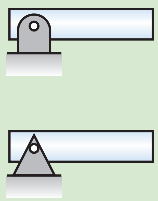
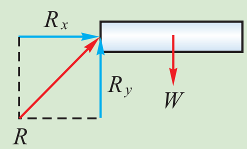
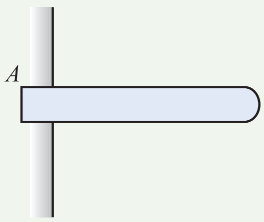
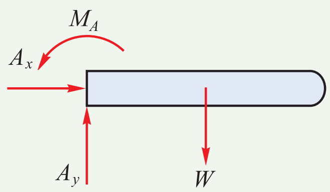
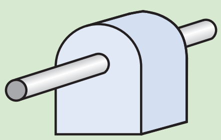
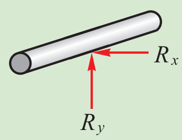
將受力物體之支承移去，並把其受到之所有外力一一表示出來，以便解析問題，由此所繪之圖形即爲自由體圖 (Free body diagram) 或稱爲分離體圖。

常見之自由體圖繪法如表 2-1 所示。

▼ 表 2-1　自由體圖繪法

各物體間之關係圖	移去物體名稱	自由體圖	說明
	1. 地球		1. 重力 W垂直向下並通過物體重心。
	1. 柔軟繩 T_1、T_2(重量忽略不計) 2. 地球		1. 柔軟之繩只能承受張力。 2. 三力作用平衡時，必交於一點。
	1. 光滑表面 2. 地球		1. 物體承受之反力 N與斜面垂直。 2. 物體雖未與地球接觸，但承受來自地球之重力 W。
	1. 粗糙表面 2. 地球		1. 物體有往斜下方運動之趨勢，摩擦力 f與物體運動方向相反。
	1. 滾輪 2. 地球		1. 物體可做水平方向移動，接觸點僅能承受垂直方向之作用力 R。 2. 物體承受重力 W。 (W必須作用於物體重心，並鉛直向下。)

▼ 表 2-1　自由體圖繪法 (續)

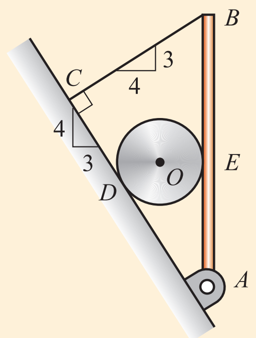
各物體間之關係圖	移去物體名稱	自由體圖	說明
	光滑銷釘		1. 物體承受所移去之銷釘之反力 R。 2. R可分解成水平反力 R_x 及垂直反力 R_y。
	1. 固定架 2. 地球		1. 固定端承受一方向未定之力，以 A_x及 A_y 表示。 2. 固定端 A承受一力矩，以 M_A 表示。
	圓軸之光滑支撐		1. 物體承受來自支撐之反力方向未定，以 R_x 及 R_y 表示。

畫自由體圖時，應注意之事項：

1. 自由體圖上之作用力，無論其為已知或未知，均須全部標示出來，不可遺漏。
2. 自由體圖上未知作用力，其方向可先行假設，若計算出之答案為負值，則表示假設之方向與實際作用方向相反。
3. 重力必須通過物體的重心，且垂直向下。
4. 在光滑接觸面上，接觸面間兩物體互相作用之力，其力線必與接觸面垂直。
5. 繩、鏈等柔軟物體，只能承受張力，其力線須沿繩之方向作用。

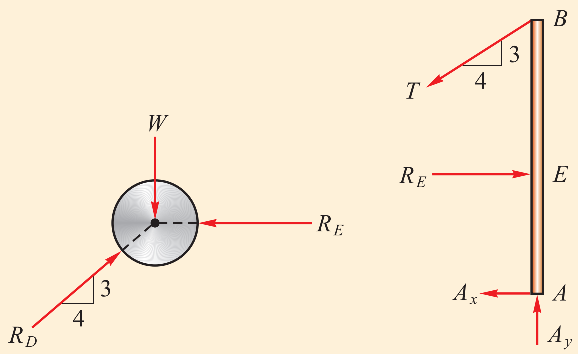
例題 2-7

如圖 2-13 所示，圓柱重 W，置於光滑斜面及光滑桿 AB 之間，桿子頂端 B 以 BC 繩繫之，A 端為鉸接，試畫出圓柱及 AB 桿之自由體圖。



▲ 圖 2-13

解



例題 2-8

如圖 2-14 所示，設接觸面皆為光滑，二圓柱重量分別為 W_1、W_2，試繪二圓柱之自由體圖。

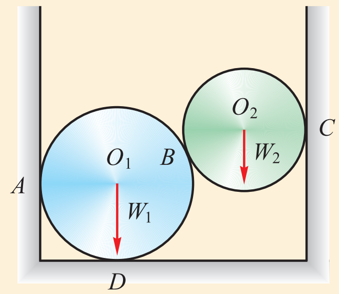


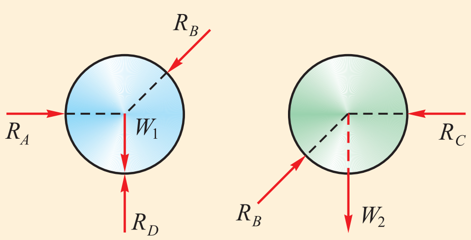
圖 2-14

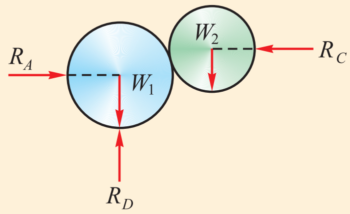
解

說明：

如下圖所示

1. 圓柱 W_1 垂直壓向接觸面 A 及 D，以垂直於接觸面之反力 R_A 及 R_D 表示。
2. 圓柱 W_2 垂直壓向接觸面 C，以垂直於接觸面之反力 R_C 表示。
3. 兩圓柱間之反力 R_B 沿其連心線作 O_1O_2 作用。(三力作用成平衡時必交於一點，即 R_B 之方向必沿二圓柱連心線 O_1O_2 作用。)

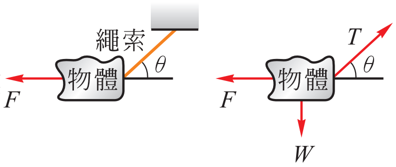




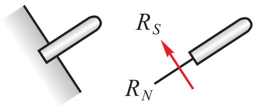
隨堂練習 ▸▸

(　　) 1. 對下列各種支座及接觸點反作用力的自由體圖之畫法中何者有誤？

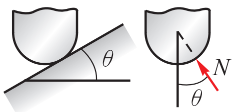
(A) 繩索



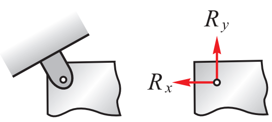
(B) 固定端支承



(C) 光滑表面

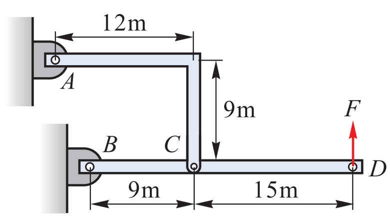


(D) 光滑釘銷



。

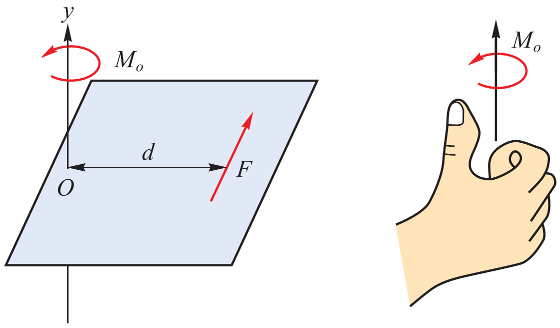
2. 如下圖所示之構架，試畫出 *AC* 及 *BD* 桿之自由體圖。



2-3 力矩與力矩原理

一、力矩

物體受外力作用，其外效應除平移外，另有繞一點或一軸旋轉之趨勢，此旋轉之量常用力矩 (Moment) 來表示其大小。力矩之定義為作用力乘以該力作用線至軸線間的垂直距離 (即力臂)，其方向判定通常用右手定則確定之，四指表迴轉方向，姆指表力矩向量之方向，即軸的正向。如圖 2-15 所示。



▲ 圖 2-15

$$M_O = Fd \quad \text{(2-6)}$$

M_O：對 O 點產生之力矩

F：作用力

d：力臂

作力矩之運算時應注意事項如下：

1. 因力矩為力與距離之乘積，故其單位如：kgw-m、kgw-cm、lbw-ft、N-m 等。
2. 力矩乃旋轉之趨勢故為向量，於力學分析中，必須確定好正負符號規則，不可混淆，一般常以逆時針旋轉為正號，順時針旋轉為負號。
3. 作用力可沿其作用線任意移動，而不影響其對平面上某一點之力矩值。
4. 力之作用線若通過力矩中心，其力矩值為零。
5. 若力之作用線不與力矩軸垂直，可將此力分解為二分力，一與力矩軸垂直，另一與力矩軸平行，與力矩軸平行之分力，不使物體產生旋轉，其力矩值為零。故一力對一軸之力矩，等於與軸垂直之分力所產生之力矩。

二、力矩原理

同平面任何力系中，各作用力對任一點或軸的力矩和，等於此力系之合力對於同一點或軸所生的力矩，此稱為力矩原理，亦稱為瓦鋭蘭氏定理 (Varignon's Theorem) 茲證明如下：

證明

如圖 2-16 所示，F_1 與 F_2 相交於 O 點，R 為合力，A 為 O 點外之任一點

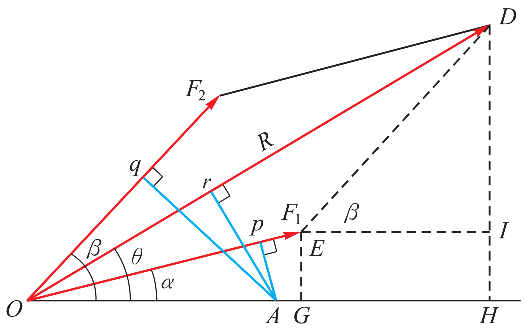
$R\sin\theta = \overline{DH} = \overline{DI} + \overline{IH}$

$R\sin\theta = F_2\sin\beta + F_1\sin\alpha$

$$R\frac{\overline{Ar}}{\overline{OA}} = F_2\frac{\overline{Aq}}{\overline{OA}} + F_1\frac{\overline{Ap}}{\overline{OA}}$$

$R\times\overline{Ar} = F_1\times\overline{Ap} + F_2\times\overline{Aq}$

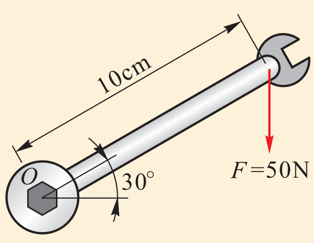
即合力對於物體上任一點之力矩，等於分力對於該點之力矩和。



▲ 圖 2-16

例題 2-9

如圖 2-17 所示，一扳手受一 50N 之力作用，試求其對 O 點之力矩為多少？



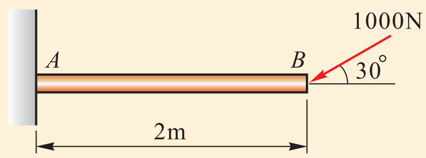
▲ 圖 2-17

解 ↶+ $M_O = Fd$，$d = 10\cos 30°$ 代入

$$= -50\times 10\cos 30° = -250\sqrt{3}\ \text{N-cm}\ (↻)$$

例題 2-10

如圖 2-18 所示，1000N 之力作用於懸臂樑之 B 點，試求該力對固定端 A 點之力矩大小為多少？



▲ 圖 2-18

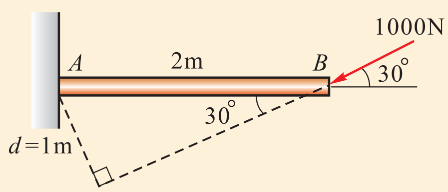
解

方法一：

$\circlearrowleft + \; M_A = Fd$

$d = 2\sin 30° = 1\text{m}$

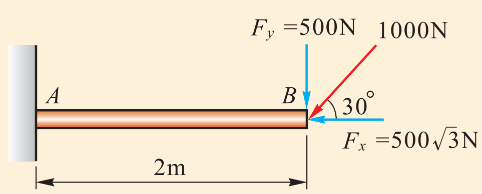
$\circlearrowleft + \; M_A = -1000 \times 1 = -1000\text{N-m}\ (\circlearrowright)$



方法二：將 1000N 分解成水平分力 F_x 及垂直分力 F_y，

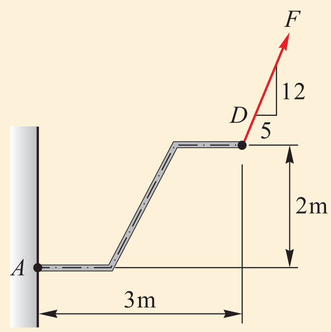
$\circlearrowleft + \; M_A = F_x \times 0 - F_y \times 2$

$\circlearrowleft + \; M_A = -500 \times 2 = -1000\text{N-m}\ (\circlearrowright)$



例題 2-11

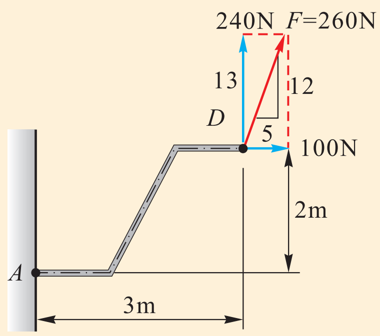
如圖 2-19 所示，桿件受 $F = 260\text{N}$ 力量作用，試求此力對 A 點所產生之力矩大小為多少？



▲ 圖 2-19

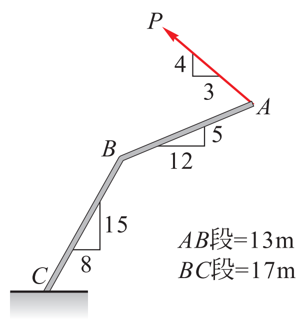
解　如下圖所示

$\curvearrowleft + \ \Sigma M_A = 240 \times 3 - 100 \times 2 = 520\text{N-m}\ (\circlearrowleft)$

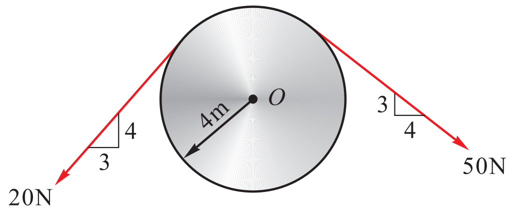


隨堂練習 ▶▶

(　　) 1. 如右圖所示，有一力 $P = 50\text{N}$ 作用於 A 點，試求其對 C 點所產生的力矩為多少？
(A)1000N-m
(B)1200N-m
(C)1400N-m
(D)1600N-m。



(　　) 2. 如右圖所示，二力對 O 點之力矩和為多少？
(A)100N-m，順時針
(B)120N-m，順時針
(C)160N-m，逆時針
(D)180N-m，順時針。



(　　) 3. 下列有關力矩之敘述，何者錯誤？ (A) 與力矩軸相交的力量對此軸之力矩為零 (B) 力矩大小與施力之力臂長度成正比 (C) 物體所受力矩愈大表示此物體轉動的趨勢愈大 (D) 力沿著作用線移動時，會改變力矩之大小。

2-4 力偶

一、力偶與力偶矩

凡大小相等、方向相反，且作用線不在同一直線上之兩平行力，稱爲力偶 (Couple)。力偶在作用面上，對任一點所生之力矩，則稱爲力偶矩。力偶是最簡單的力系，多組力偶合併後仍爲力偶，不能再合併爲單力，其不能使物體平移，僅能使物體產生轉動效應。生活中如：駕駛汽車方向盤、開關水龍頭、攻螺紋等，皆爲力偶應用之實例。如圖 2-20(a) 所示，力偶中二平行力對平面上 O 點，所產生之力矩爲

$$\circlearrowleft + \; M_O = F(d + a) - Fa = Fd = C$$

故在平面上任一點之力偶矩等於平行力對力偶臂之乘積，即 $C = Fd$，因此力偶矩之大小，在同平面中任意點均爲相同之值與迴轉中心位置無關。

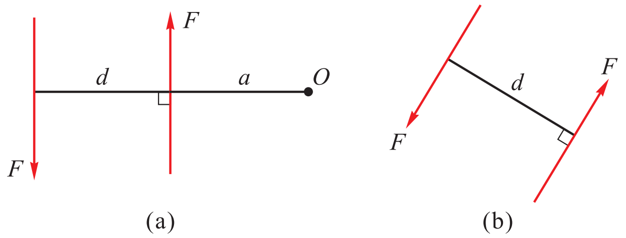


圖 2-20

如圖 2-20(b) 所示：

$$C = Fd \qquad (2\text{-}7)$$

C：力偶矩

F：平行力

d：力偶臂 (兩力偶力之間的垂直距離)

二、力偶之特性

1. 力偶中之各力合力爲零，但力偶矩不爲零。
2. 力偶矩之單位及迴轉方向之正、負符號規定均與力矩相同。
3. 力偶只能使物體產生迴轉，不能使物體產生平移效應。
4. 力偶矩的大小，在同平面中任何點均具相同之値，與迴轉中心之位置無關。
5. 力偶不能用一單力平衡，而須用另一大小相等，方向相反之力偶來平衡。
6. 力偶對於物體之外效應，決定於下列三要素：
   (1) 力偶矩之大小
   (2) 力偶迴轉之方向
   (3) 力偶作用面之傾斜度

三、等値力偶

凡二力偶之大小及方向相同，且位於互相平行之兩平面上，即稱此二力偶爲等値力偶 (Equivalent couple)。如下幾種力偶之轉換皆爲等値力偶：

1. 力偶可在其原作用平面上任意移動或轉動。如圖 2-21(a)，當 $F_1 = F_2 = F_3$ 時，$C_1 = C_2 = C_3$。

2. 力偶可由原作用平面移至另一平行之平面上。如圖 2-21(b)，由 A_1 移至 A_2 平面上，$C_1 = C_2$。
3. 只要維持力偶矩之大小及方向不變，可以同時將力偶力與力偶臂之大小做任意變更。如圖 2-21(c)，$C_1 = C_2 = 10$N-m (↻)。

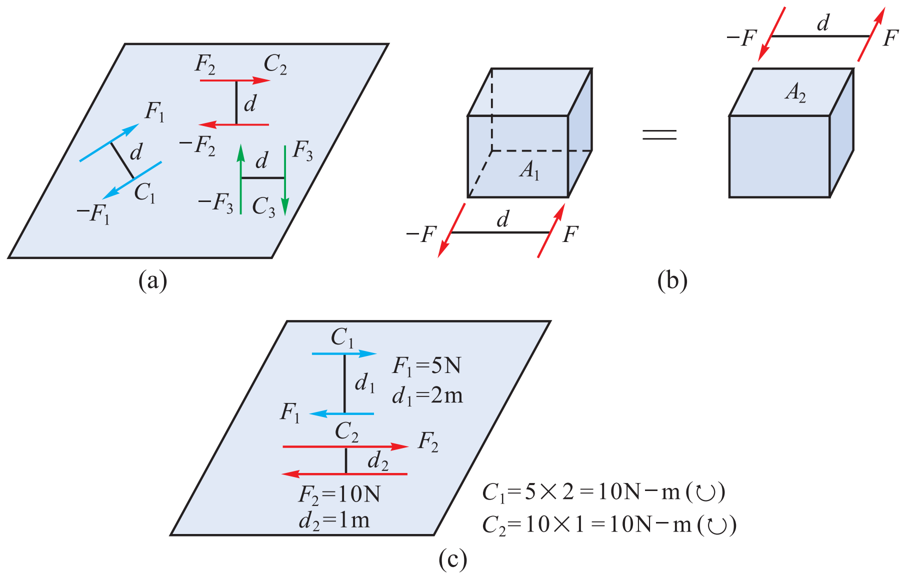


圖 2-21　等值力偶

四、分解一力為一單力及一力偶

在解析力學問題中，一單力常可分解爲大小相等、方向相同，但作用點不同之另一平行單力及一力偶，且分解後其外效應不變。

如圖 2-22 所示，一單力 F 作用於 A 點，在平面上取另一 O 點，並在 O 點加上與 F 平行且大小相等之兩共線力 F_1 及 F_2，因 F_1 及 F_2 大小相等且方向相反，可互相抵消，故不會改變原有單力 F 之外效應。但作用於 A 點之 F 力與作用於 O 點之 F_1 力，即形成一力偶，而 F_2 可視爲另一與 F 同大小之單力；此即一單力可分解爲另一單力及一力偶。

反之亦然，作用於同一平面之一單力及一力偶亦可合成爲另一等效單力。

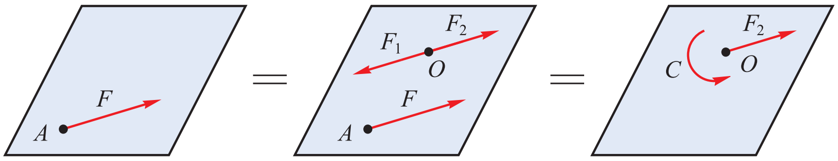


圖 2-22　分解一力為一單力及一力偶

例題 2-12

如圖 2-23 所示，試求此二力偶之合力偶矩大小為多少？

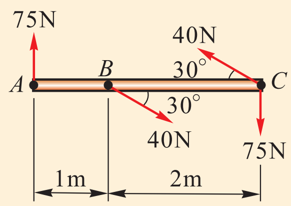
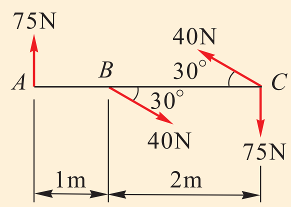


圖 2-23

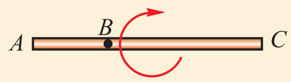
解

如下圖所示，定逆時針方向為正：

$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma C = 40\times 2\sin 30^\circ - 75\times 3 = -185\text{N-m}\ (\circlearrowright)$

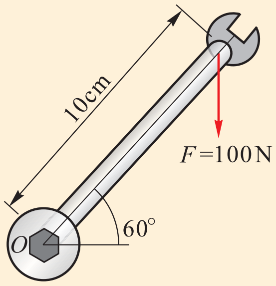


$$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma C = -185\text{N-m}$$



例題 2-13

如圖 2-24 所示，扳手受力 F 爲 100 牛頓，試將 F 分解爲作用於 O 點之一單力及一力偶。



▲ 圖 2-24

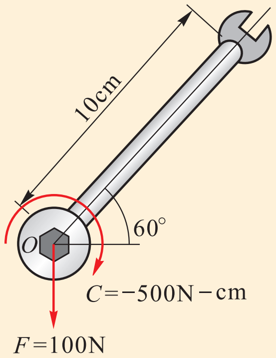
解

如下圖所示，單力 $F = 100\text{N}$

$\curvearrowleft + \quad C = Fd$

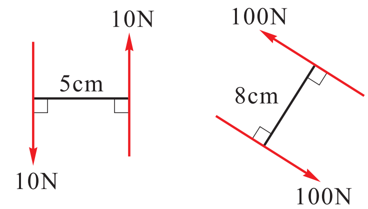
$d = 10 \cos 60°$

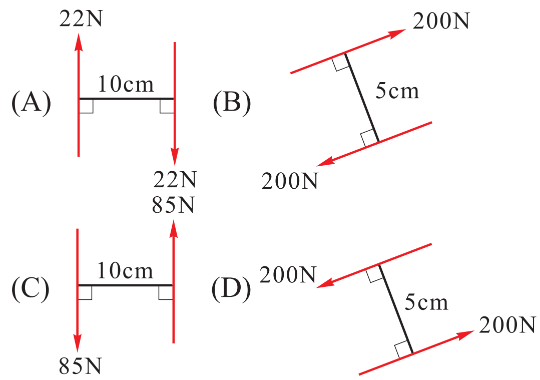
力偶 $C = F \times 10 \cos 60° = -100 \times 10 \times \dfrac{1}{2} = -500\text{N-cm}$ (↻)



隨堂練習

(　　) 1. 如右圖所示，何者為此兩力偶之等值力偶？





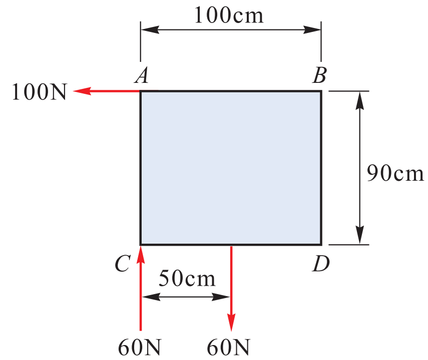
(　　) 2. 如右圖所示，若將圖中之一單力與一對力偶改以一單力表示，則此單力應如何移動？

(A)100N 向上移動 30cm

(B)100N 向下移動 30cm

(C)160N 向左移動 30cm

(D)160N 向右移動 30cm。



2-5 同平面各種力系之合成及平衡

一、平衡之定義

一物體若不受外力或所受外力之和爲零時，根據牛頓第一運動定律，物體即保持靜止狀態或等速直線運動，此即爲物體之移動平衡；又物體所受力矩和爲零，則物體不發生轉動或維持等角速度轉動，此即爲物體之轉動平衡。亦即：

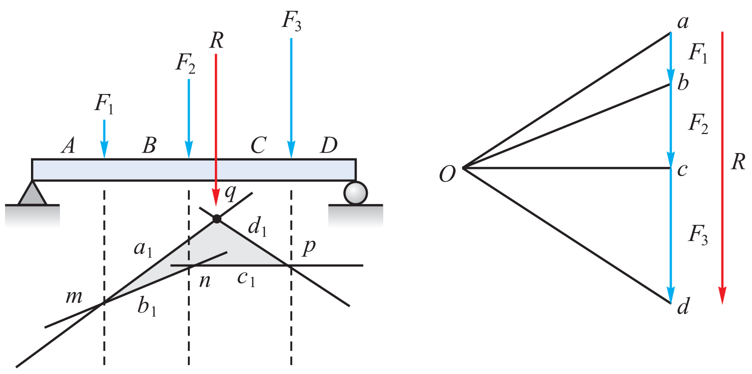
$$\text{平衡}\begin{cases}\text{移動平衡：}\Sigma\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}+\cdots=0\\ \text{轉動平衡：}\Sigma\overline{M}=\overline{M_1}+\overline{M_2}+\overline{M_3}+\cdots=0\end{cases}$$

同平面各種力系之合成及平衡之求法，可利用圖解法或數解法來解析，一般以數解法爲主。

二、同平面平行力系之合成

(一) 圖解法

設有 F_1、F_2及 F_3 三平行力作用於一樑上，如圖 2-25 所示，若忽略樑本身重量，欲求其合力及所在位置，以圖解法解之，其步驟如下：



(a) 位置圖 (索線多邊形)　　(b) 力線圖 (力多邊形)

▲ 圖 2-25　以圖解法求同平面平行力系之合成

1. 如圖 2-25(a)，定適當比例繪各力在樑上的位置圖，加入鮑氏記號 A、B、C、D，以標示出各作用力之間隔區域。
2. 如圖 2-25(b)，定適當比例繪各力的力線圖以找其合力，連接 ad 即爲其合力 R。
3. 在力線圖附近任取一點 O，稱爲極點 (Pole)，連接 $\overline{Oa}$ 、$\overline{Ob}$ 、$\overline{Oc}$ 及 $\overline{Od}$ 線，稱爲射線 (Ray)。
4. 在 F_1 作用線上任意取一點 m，作 $\overline{Oa}$ 、$\overline{Ob}$ 平行線交於 m，即位置圖中之 a_1、b_1 線。
5. 將 b_1 線與 F_2 之作用線交點標記爲 n，過 n 點作 $\overline{Oc}$ 平行線與 F_3 作用線相交於 P 點，即位置圖中之 C_1 線。
6. 再由 p 點作 $\overline{Od}$ 平行線，使之與 a_1 線交於 q 點，此點 q 即爲合力之作用位置。
7. 位置圖中之 a_1、b_1、c_1、d_1等線稱索線，其所成之多邊形稱索線多邊形 (Funicular polygon)。

補充說明

1. 若力多邊形及索線多邊形閉合，則合力為零。
2. 若力多邊形閉合，而索線多邊形不閉合，則合力為一力偶。
3. 若力多邊形不閉合，則合力為一單力。

(二) 數解法：

1. 如圖 2-26 所示，有 F_1、F_2、F_3…等平行力作用於一物體上時，則

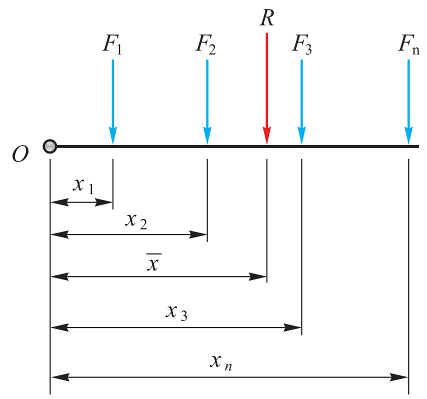
   合力 R 之大小：$R = \Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$

   合力 R 之方向：與各平行力平行。

   合力 R 作用線之位置：在力系平面中取一點 O，依力矩原理求之。

$$R\bar{x} = \Sigma M_O = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \cdots + F_nx_n$$

$$\bar{x} = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \cdots + F_nx_n}{R}$$



▲ 圖 2-26

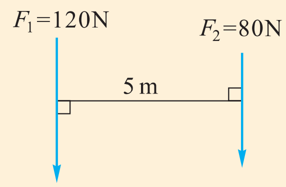
補充說明

1. 若 $R = 0$，$\Sigma M = 0$ 則力系合力為零，即力系為平衡力系。
2. 若 $R = 0$，$\Sigma M \neq 0$ 則力系之合力為一力偶。
3. 若 $R \neq 0$，則力系之合力為一單力。

2

例題 2-14

如圖 2-27 所示，二平行力 $F_1 = 120\text{N}$，$F_2 = 80\text{N}$，方向相同，相隔距離 $d = 5\text{m}$，試求其合力 R 及其位置 $\bar{x}$。



▲ 圖 2-27

解

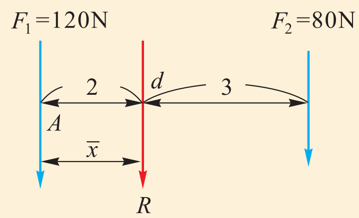
如下圖所示

$+\downarrow R = +\downarrow \Sigma F_Y = 120 + 80 = 200\text{N}\ (\downarrow)$

$\curvearrowleft + \ R\bar{x} = \Sigma M_A$ (設合力 R 作用於 A 點右方 $\bar{x}\,m$ 處)

$-200\bar{x} = 120\times0 - 80\times5$

$\bar{x} = 2\text{m}$

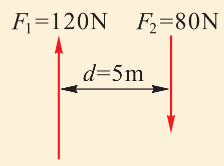


討論：

F_1F_2 二平行力方向相同，合力 R 之方向與二力的方向相同，其位置在二力之間靠近較大力 F_1，且與二力距離成反比 2：3

例題 2-15

如圖 2-28 所示，二平行力方向相反 $F_1=120\text{N}$、$F_2=80\text{N}$，相隔距離 $d=5\text{m}$，試求其合力 R 及其位置 $\bar{x}$。



▲ 圖 2-28

解

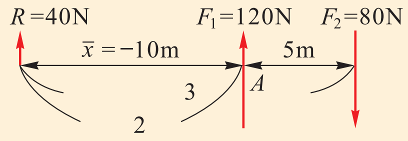
如下圖所示

$+\uparrow R=+\uparrow\Sigma F_Y=120-80=40\text{N}\ (\uparrow)$

$\curvearrowleft + \ R\bar{x}=\Sigma M_A$（設合力 R 作用於 A 點右方 $\bar{x}\,m$ 處）

$40\,\bar{x}=120\times0-80\times5$

$\bar{x}=-10\text{m}$（$\bar{x}$ 爲負表示合力在 A 點左側）

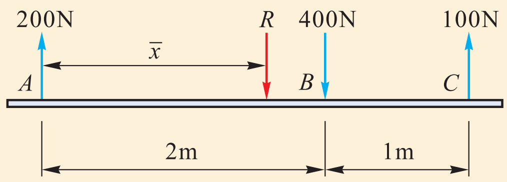


討論：

F_1、F_2 二平行力方向相反，合力 R 之方向與較大力 F_1 的方向相同，其位置在較大力 F_1 外側，且與距離成反比 2：3

例題 2-16

如圖 2-29 所示之平行力系，試求其合力大小、方向及作用點。



▲ 圖 2-29

解

$+\uparrow$ $R = 200 + 100 - 400 = -100$ (N) $\downarrow$

設 R 作用於 A 點右方 $\bar{x}\,m$ 處

依力矩原理，以 A 點為力矩中心

$\circlearrowleft + \quad -R\,\bar{x} = 100 \times 3 - 400 \times 2$

$-100\,\bar{x} = -500$

$\bar{x} = 5$ m

三、同平面平行力系之平衡

同平面平行力系如平衡時，其合力及合力矩均必須等於零，即 $\Sigma F = 0$ 且 $\Sigma M = 0$，此力若作用於靜止之物體，將不產生移動或旋轉效應。

(一) 圖解法：

1. 力多邊形須閉合。
2. 索線多邊形須閉合。

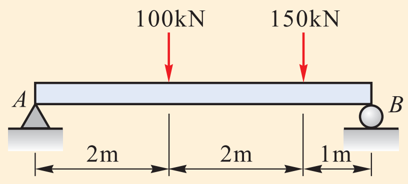
(二) 數解法：

依平衡條件：

$\Sigma F = 0$，$\Sigma M = 0$ 求解之。因其只有二個平衡方程式，故只可解二個未知數。

例題 2-17

如圖 2-30(a) 所示，試以圖解法及數解法求 A、B 二點之反作用力各多少？



▲ 圖 2-30

解

方法一 (數解法)：

如下圖所示為圖 2-30 之自由體圖

$\curvearrowleft + \ \Sigma M_A = 0$

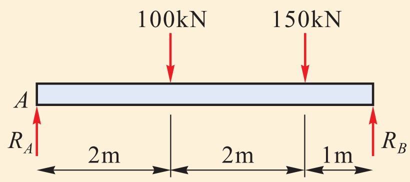
$5R_B - 150 \times 4 - 100 \times 2 = 0$

$R_B = 160\ \text{kN}\ (\uparrow)$

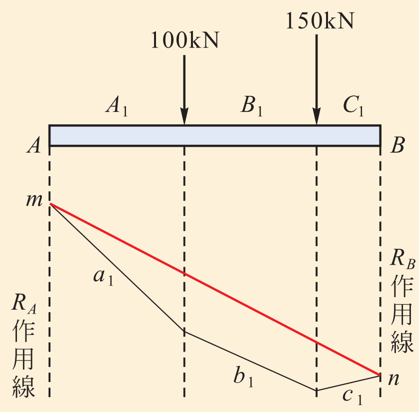
$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0$

$R_A + R_B - 100 - 150 = 0$

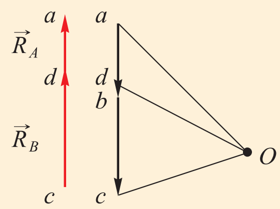
$R_A = 90\ \text{kN}\ (\uparrow)$



方法二 (圖解法)：



位置圖



力線圖

1. 定位置圖之比例尺：1cm ＝ 1m，力線圖之比例尺：1cm ＝ 100kN。
2. 依比例尺繪出位置圖，已知力的力線圖。
3. 在力線圖任取 O 點爲極點及畫出射線 $\overline{Oa}$ 、$\overline{Ob}$ 、$\overline{Oc}$ 。
4. 在位置圖之 R_A 作用線上任取一點 m，依上節方法，畫出索線 a_1、b_1、c_1。c_1索線交 R_B 作用線於 n 點。
5. 因平行力系平衡時，索線多邊形必閉合，故可將 m、n 相連，使索線多邊形閉合。
6. 在力線圖中由極點 O 引線平行 mn，得 d 點。
7. 則向量 cd 即代表 $\vec{R}_B$ ，而向量 da 即代表 $\vec{R}_A$ 。
8. 由比例尺量得：$\vec{R}_A = 90\text{kN}$ (↑)，$\vec{R}_B = 160\text{kN}$ (↑)。

四、同平面不共點力系之合成

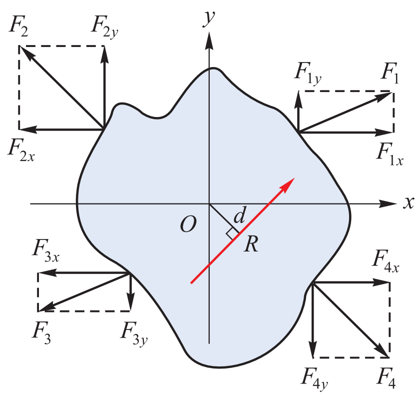
1. 圖解法：其原理與同平面平行力系求合力之圖解法相同，一般以數解法為主，故不再詳述。
2. 數解法
   (1) 同平面不共點力系求合力與同平面共點力系求合力相同，如圖 2-31(a) 先將數力分解為水平 x 及垂直 y 方向之分力，並分別求出 ΣF_x 和 ΣF_y，如圖 2-31(b) 再求出合力 R，即為所求合力之大小及方向。

   合力之大小：$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$

   合力之方向 (與水平軸之夾角)：$\theta = \tan^{-1}\dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

   (2) 依力矩原理 $Rd = \Sigma M_O$，求出合力位置

   合力之位置：$d = \dfrac{\Sigma M_O}{R}$



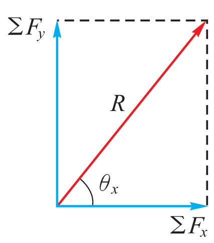


圖 2-31　求合力及其位置

例題 2-18

如圖 2-32 所示，$F_1 = 60\text{N}$、$F_2 = 50\text{N}$、$F_3 = 100\text{N}$、$F_4 = 80\text{N}$，正方格每邊長 1cm 公分，試求其合力及合力至 A 點距離 d。

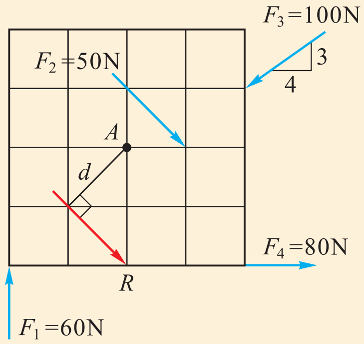


圖 2-32

解

解一：

$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 50\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 80 - 80 = 25\sqrt{2}\ (\rightarrow)$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 60 - 50\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 60 = -25\sqrt{2}\ (\downarrow)$$

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = 50\text{N}\ (\searrow)$$

$$Rd = \Sigma M_A$$

$$50d = -60\times2 - 50\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 60\times2 + 80\times1 + 80\times2$$

$d = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm (d 爲負數，合力位於 A 點右上方)

解二：

因 F_1、F_3、F_4 合力及合力偶爲 0

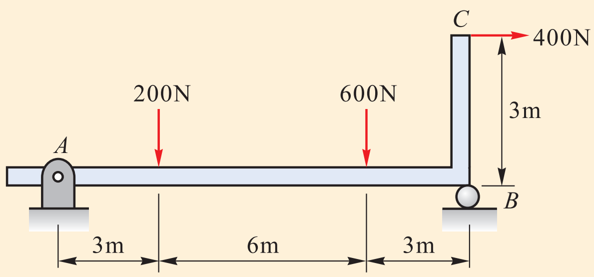
故力系之合力等於 F_2 即 50N

五、同平面不共點力系之平衡

1. 圖解法：其原理與同平面平行力系之圖解法相同，一般以數解法爲主，故不再詳述。
2. 數解法：依平衡條件：
   $\Sigma F_x = 0$、$\Sigma F_y = 0$ 且 $\Sigma M = 0$ 求解之。因其有三個平衡方程式，故可解三個未知數。

例題 2-19

如圖 2-33 所示，*A* 端爲鉸鏈支座，*B* 端爲滾子支座，試求支座 *B* 之反力爲多少？



▲ 圖 2-33

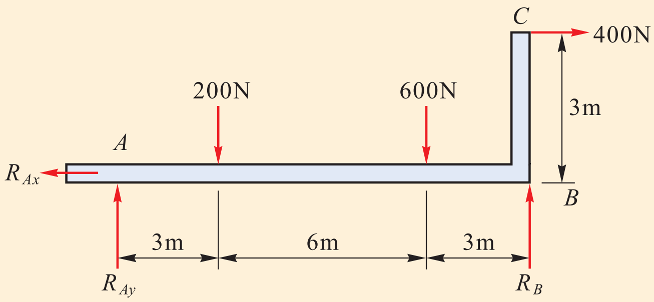
解

如下圖所示

$\curvearrowright + \ \Sigma M_A = 0$

$12R_B - 200\times3 - 600\times9 - 400\times3 = 0$

$R_B = 600\text{N}\ (\uparrow)$



例題 2-20

如圖 2-34 所示之構件中，試求 A 點之反力 A_x、A_y 及 B 之反力 R_B 爲多少？

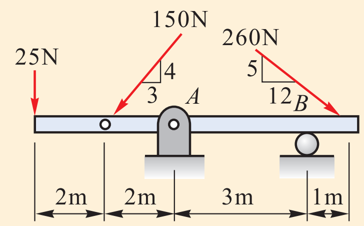


圖 2-34

解

如下圖所示

$\curvearrowleft + \ \Sigma M_A = 0$

$25 \times 4 + 120 \times 2 + 3R_B - 100 \times 4 = 0$

$R_B = 20\text{N} \ (\uparrow)$

$\xrightarrow{+} \ \Sigma F_x = 0$

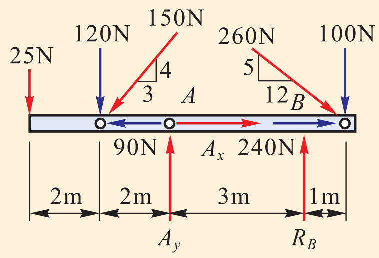
$-90 + A_x + 240 = 0$

$A_x = -150\text{N} \ (\leftarrow)$

$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0$

$-25 - 120 + A_y + 20 - 100 = 0$

$A_y = 225\text{N} \ (\uparrow)$



例題 2-21

如圖 2-35 所示，一物重 100N 置於重 32N 之 AB 桿上，試求繩張力為多少？

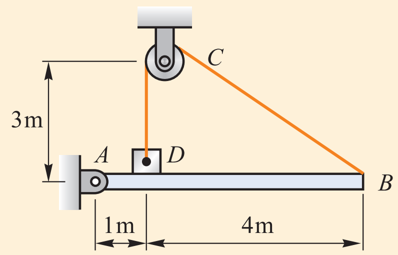


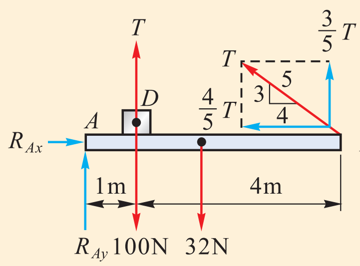
圖 2-35

解 如右圖所示

$\curvearrowleft + \ \Sigma M_A = 0$

$\frac{3}{5}T \times 5 + T \times 1 - 32 \times 2.5 - 100 \times 1 = 0$

$T = 45\text{N}$



六、同平面共點力系之平衡

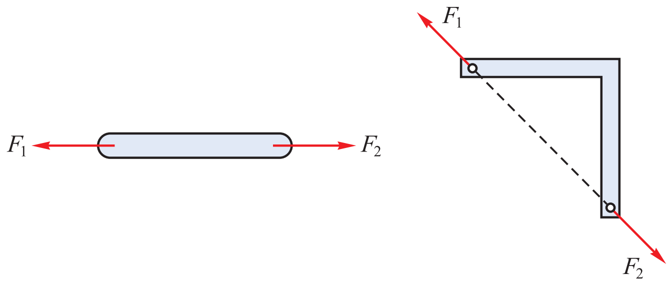
1. 平衡之條件：$\Sigma F_x = 0$、$\Sigma F_y = 0$

   (1) 一物體受二力作用而平衡時，其條件為：

   ① 二力大小相等。

   ② 二力方向相反。

   ③ 二力作用於同一直線上。



▲ 圖 2-36　二力作用平衡條件

(2) 一物體受三力作用而平衡時，其條件爲：

① 三力的作用線若不平行，則必交於一點。

② 三力必作用於同一平面。

③ 三力構成封閉三角形。

2. 求三力平衡時，除使用平衡方程式 $\Sigma F_x = 0$、$\Sigma F_y = 0$ 求解外，亦可由下列幾種方法求解。

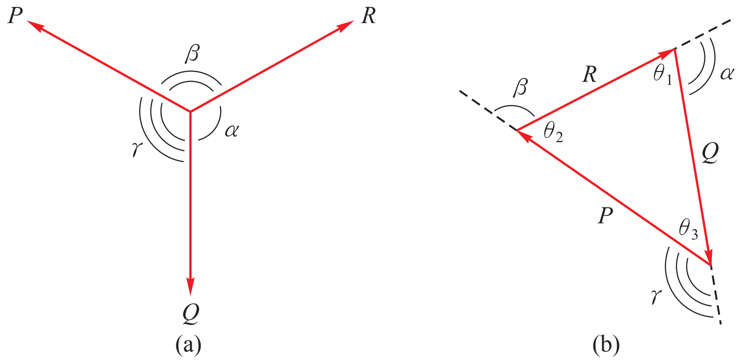
(1) 因三力平衡，故三力必成一封閉三角形，以此三角形對應邊比例求解。

(2) 拉密定理：如圖 2-37(a) 三力成平衡

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma} \quad \cdots\cdots (2\text{-}8)$$

(3) 正弦定理：如圖 2-37(b)

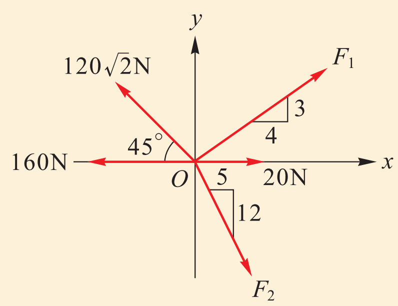
$$\frac{P}{\sin\theta_1} = \frac{Q}{\sin\theta_2} = \frac{R}{\sin\theta_3} \quad \cdots\cdots (2\text{-}9)$$



▲ 圖 2-37

例題 2-22

如圖 2-38 所示，同平面共點力系合力為零，試求 F_1 及 F_2 分別為多少？



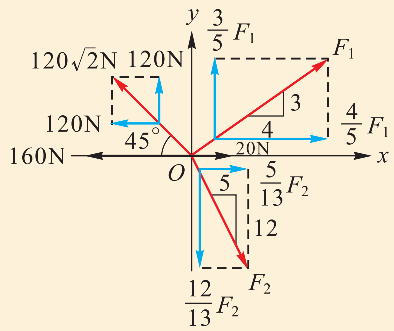
▲ 圖 2-38

解 如下圖所示

$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0 \qquad \frac{4}{5}F_1 + \frac{5}{13}F_2 - 120\sqrt{2}\cos 45° - 160 + 20 = 0 \cdots\cdots(1)$

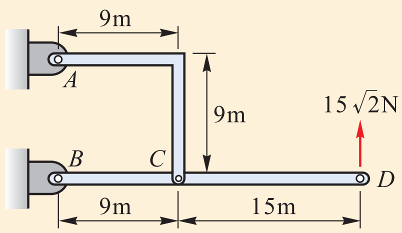
$+\!\uparrow\ \Sigma F_y = 0 \qquad \frac{3}{5}F_1 - \frac{12}{13}F_2 + 120\sqrt{2}\sin 45° = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由 (1)(2) 得 $F_1 = 200$N，$F_2 = 260$ N



例題 2-23

如圖 2-39 所示，試求 A 點之反力為多少？



▲ 圖 2-39

解

如下圖所示

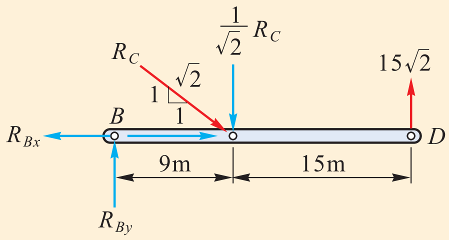
AC 桿為二力桿 $\Rightarrow R_A = R_C$

$\curvearrowleft + \ \Sigma M_B = 0$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}R_C \times 9 + 15\sqrt{2} \times 24 = 0$$

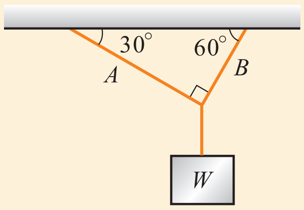
$R_C = 80\text{N}$

$R_A = R_C = 80\text{N} (\searrow)$



例題 2-24

如圖 2-40 所示，有一物體 W 重 200N，以 A 與 B 繩懸掛於天花板，試求 A、B 繩之張力為多少 N？

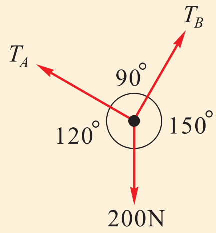


▲ 圖 2-40

解

解一：

如右圖所示，以拉密定理求解



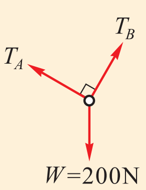
$$\frac{T_A}{\sin 150^\circ}=\frac{T_B}{\sin 120^\circ}=\frac{200}{\sin 90^\circ}$$

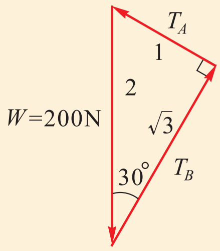
$T_A=100\text{N}$，$T_B=100\sqrt{3}\ \text{N}$

解二：

如下圖所示

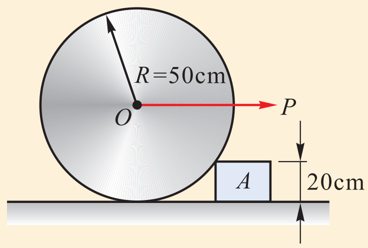
$$T_A=\frac{200}{2}\times 1=100\text{N}，T_B=\frac{200}{2}\times\sqrt{3}=100\sqrt{3}\,\text{N}$$





例題 2-25

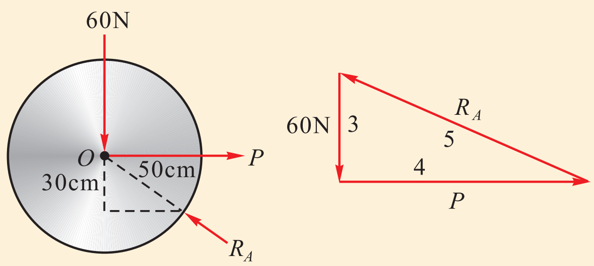
如圖 2-41 所示，圓柱重 60N，半徑為 50cm，試求使圓柱越過障礙物所需之最小水平力。



▲ 圖 2-41

解 即將越過障礙物 A 時，地面反力為零，故 60N、R_A、P 三力平衡，如下圖所示。

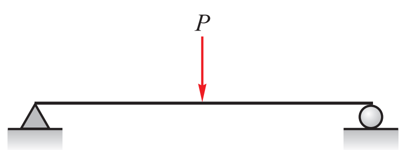
$$P = \frac{60}{3} \times 4 = 80\text{N}$$



六、樑之負荷與支承反力之計算

(一) 集中負荷

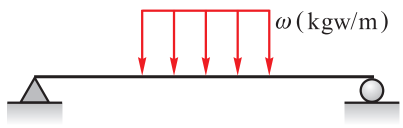
如圖 2-42 所示，負荷集中於樑之某一點，不計樑本身重量。



▲ 圖 2-42

(二)均佈負荷

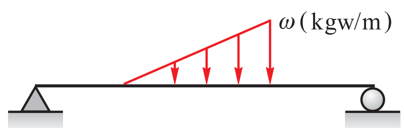
如圖 2-43，負荷均勻作用於樑之某一段長度內，均佈負荷大小，一般以符號 ω 表示之，其單位爲 kgw/m，N/m。



▲ 圖 2-43

(三)均變負荷

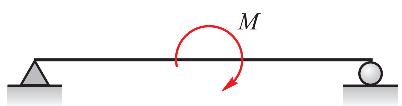
如圖 2-44，負荷作用由一端向另一端線性增加作用於樑者。



▲ 圖 2-44

(四)彎矩負荷

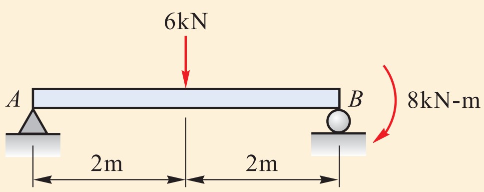
如圖 2-45，在樑之某一點有力偶矩作用者。



▲ 圖 2-45

例題 2-26

如圖 2-46 所示，試求 A、B 二支點之反力各爲多少？



▲ 圖 2-46

解 如右圖所示

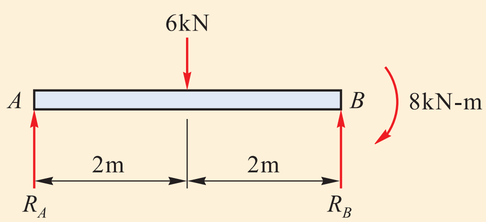
$\circlearrowleft + \ \Sigma M_B = 0$

$-R_A \times 4 + 6 \times 2 - 8 = 0$

$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0$

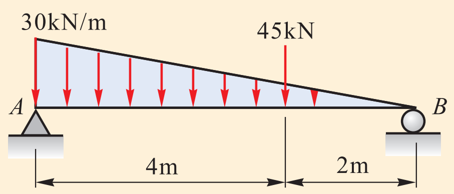
$R_A - 6 + R_B = 0$

得 $R_A = 1\text{kN}(\uparrow)$，$R_B = 5\text{kN}(\uparrow)$



例題 2-27

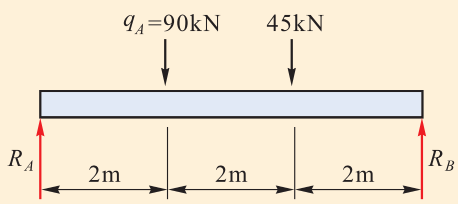
如圖 2-47 所示，試求 A、B 二點之反作用力各多少？



▲ 圖 2-47

解

本題屬均變負荷與集中負荷之合成，其均變負荷相當於三角形之面積，如下圖所示。



$q_{\text{A}} = \frac{1}{2} \times 30 \times 6 = 90(\text{kN})$

其作用點在三角形重心處，三角形的重心在距底邊 $\frac{1}{3}$ 處，距離頂角 $\frac{2}{3}$ 處，

亦即距 A 點 $6 \times \frac{1}{3} = 2$ m 處。

$\curvearrowleft + \ \Sigma M_A = 0$

$6R_B - 45 \times 4 - 90 \times 2 = 0$

$R_B = 60$ kN (↑)

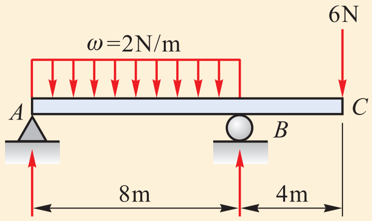
$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0$

$R_A + R_B - 90 - 45 = 0$

$R_A = 75$ kN (↑)

例題 2-28

如圖 2-48 所示，試求 A、B 兩支點之反力各為多少？



▲ 圖 2-48

解 如下圖所示

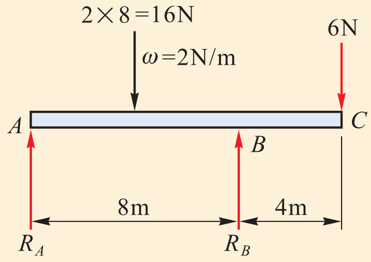
$\curvearrowleft + \ \Sigma M_B = 0$

$-R_A \times 8 + 16 \times 4 - 6 \times 4 = 0$，

$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0$

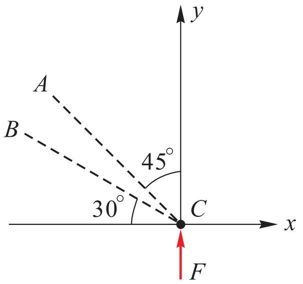
$R_A - 16 + R_B - 6 = 0$

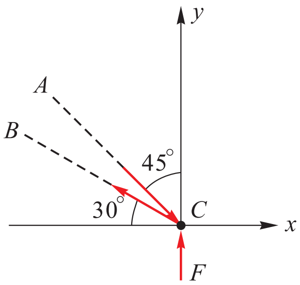
得　$R_A = 5\text{ N}(\uparrow)$，$R_B = 17\text{N}(\uparrow)$

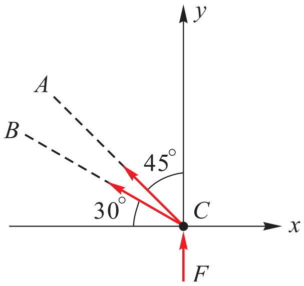


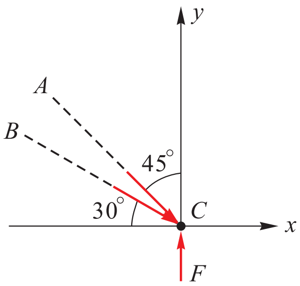
隨堂練習 ▸▸

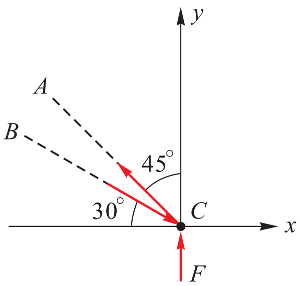
(　　) 1. 如下圖所示，C 點受一 Y 方向的作用力 $F = 1.5\text{kN}$，若欲沿著 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BC}$ 線施力，使作用在 C 點之三力達到平衡，則 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 線上作用力的方向為何？($\cos 30° = 0.866$，$\sin 30° = 0.5$，$\sin 45° = 0.707$)



(A)


(B)


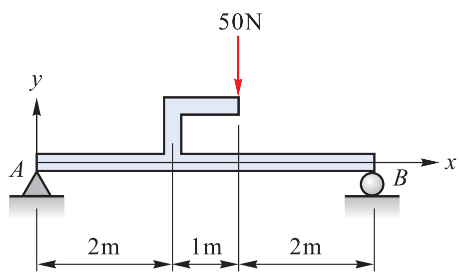
(C)


(D)


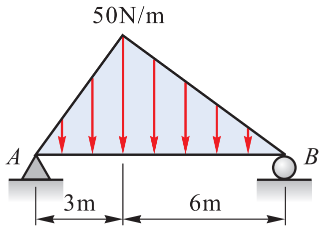
(　　) 2. 如下圖所示，試求支點之反力 R_A 與 R_B 分別為多少 N？

(A)$R_A = 40\text{N}$，$R_B = -60\text{N}$　(B)$R_A = 50\text{N}$，$R_B = 50\text{N}$

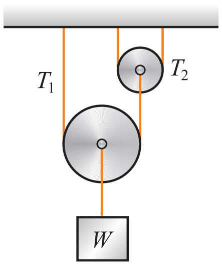
(C)$R_A = 20\text{N}$，$R_B = 30\text{N}$　(D)$R_A = -30\text{N}$，$R_B = 20\text{N}$。



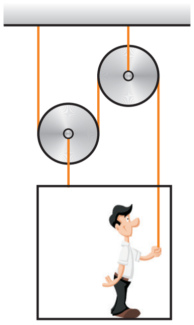
(　　) 3. 如下圖所示，樑 AB 受變化負荷作用，試求支點之反力 R_A 與 R_B 分別為多少 N？　(A)R_A ＝ 125N，R_B ＝ 100N　(B)R_A ＝ 250N，R_B＝ 200N　(C)R_A ＝ 350N，R_B ＝ 280N　(D)R_A ＝ 300N，R_B ＝ 350N。



(　　) 4. 如下圖所示之滑輪組，假設忽略滑輪及繩子重量，物重 W ＝ 800N，試求 T_1、T_2之張力為何？　(A)T_1＝ 300N，T_2＝ 300N　(B) T_1＝ 400N，T_2＝ 200N　(C)T_1＝ 100N，T_2＝ 150N　(D) T_1＝ 150N，T_2＝ 75N。



(　　) 5. 如下圖所示，人重 700N，站立於重 200N 之平台上並垂直拉下一繞過滑輪之繩索，設滑輪及繩索之摩擦力與質量不計，則此人最小須施力多少方可拉起平台？　(A)300 N　(B)400 N　(C)500 N　(D)600 N。



重點整理

2-1

1. 一個單力若無任何條件限制，可以分解成無數個分力。
2. 二共點力之合成

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta}$$

2-2

3. 在光滑接觸面上，接觸面間兩物體互相作用之力，其力線必與接觸面垂直。
4. 繩、鏈等柔軟物體，只能承受張力，其力線須沿繩之方向作用。

2-3

5. 作用力可沿其作用線任意移動，而不影響其對平面上某一點之力矩值。
6. 力之作用線若通過力矩中心，其力矩值爲零。
7. 對 O 點產生之力矩 $M_O = Fd$。
8. 力矩原理：合力對於物體上任一點之力矩，等於分力對於該點之力矩和。

2-4

9. 力偶：大小相等、方向相反，且作用線不在同一直線上之兩平行力。
10. 力偶是最簡單的力系，多組力偶合併後仍爲力偶，不能再合併爲單力，其不能使物體平移，僅能使物體產生轉動效應。生活中如：駕駛汽車方向盤、開關水龍頭、攻螺紋等。
11. 力偶之特性
    (1) 力偶中之各力合力爲零，但力偶矩不爲零。
    (2) 力偶只能使物體產生迴轉，不能使物體產生平移效應。
    (3) 力偶矩的大小，在同平面中任何點均具相同之值，與迴轉中心之位置無關。

(4) 力偶不能用一單力平衡，而須用另一大小相等，方向相反之力偶來平衡。力偶矩之單位及迴轉方向之正、負符號規定均與力矩相同。

12. 力偶之三要素：(1) 力偶矩之大小；(2) 力偶迴轉之方向；(3) 力偶作用面之傾斜度。
13. 等值力偶：二力偶之大小及方向相同，且位於互相平行之兩平面上。
14. 力偶之轉換
    (1) 力偶可在其原作用平面上任意移動或轉動。
    (2) 力偶可由原作用平面移至另一平行之平面上。
    (3) 維持力偶矩之大小及方向不變，可以同時將力偶力與力偶臂之大小做任意變更。
15. 一單力常可分解爲大小相等、方向相同，但作用點不同之另一平行單力及一力偶，且分解後其外效應不變。
16. 作用於同一平面之一單力及一力偶亦可合成爲另一等效單力。

2-5

17. 物體所受外力之和爲零時，物體即保持靜止狀態或等速直線運動，此即爲物體之移動平衡。
18. 物體所受力矩和爲零，則物體不發生轉動或維持等角速度轉動，此即爲物體之轉動平衡。
19. (1) 若 $R=0$，$\Sigma M=0$ 則力系合力爲零，即力系爲平衡力系。(力多邊形及索線多邊形閉合)
    (2) 若 $R=0$，$\Sigma M\neq 0$ 則力系之合力爲一力偶。(力多邊形閉合，而索線多形不閉合)
    (3) 若 $R\neq 0$，則力系之合力爲一單力。(力多邊形不閉合)
20. 物體受二力作用而平衡時：(1) 二力大小相等；(2) 二力方向相反；(3) 二力作用於同一直線上；(4) 拉密定理；(5) 正弦定理。
21. 物體受三力作用而平衡時
    (1) 三力的作用線若不平行，則必交於一點。
    (2) 三力必作用於同一平面。
    (3) 三力構成封閉三角形。

22. 同平面各力系之平衡，其平衡方程式及條件如下表。

力系種類	平衡方程式	可解未知數
共線力系	$R=\Sigma F=0$	1
共點力系	$\Sigma F_x=0$、$\Sigma F_y=0$	2
平行力系	$R=\Sigma F=0$、$\Sigma M_O=0$	2
不共點不平行力系	$\Sigma F_x=0$、$\Sigma F_y=0$、$\Sigma M_O=0$	3

學後評量

一、選擇題

2-1 (　　) 1. 同平面上兩作用力同時作用於一點，若其合力爲最大時，則該兩力之夾角度爲　(A)180°　(B)120°　(C)90°　(D)0°。

(　　) 2. 兩力同時作用於一點，其合力最小時，其夾角爲　(A)0°　(B)30°　(C)90°　(D)180°。

(　　) 3. 兩力之合力　(A) 必等於分力之平均值　(B) 不一定大或小於分力　(C) 必小於分力　(D) 必大於分力。

(　　) 4. 5N 之力與另一力 F 之合力爲 10N，則此 F 力　(A) 不可大於 10N　(B) 最大可至 18N　(C) 至少爲 5N　(D) 必須垂直於 5N 之力。

(　　) 5. 二力之夾角爲 45 度，其合力大小　(A) 一定小於二力　(B) 介於二力之間　(C) 一定大於二力　(D) 無法判斷。

(　　) 6. 任何數目的共點向量，其合成向量有　(A) 一個　(B) 二個　(C) 三個　(D) 不一定。

2-2 (　　) 7. 鉸支承可承受　(A) 僅能承受垂直於基地之力　(B) 任何方向的力　(C) 任何方向的力及彎矩　(D) 可承受垂直於基地的力及彎矩。

(　　) 8. 能承受各方向之力與彎矩之支承，稱爲　(A) 滾支承　(B) 鉸支承　(C) 固定支承　(D) 滑動支承。

(　　) 9. 一均質物體靜止於光滑之水平地面上，下列敘述何者正確？　(A) 此物體僅受重力與水平地面之支撐力　(B) 此物體不受任何外力　(C) 此時鉛球僅受摩擦力與水平地面之支撐力　(D) 此物體僅受重力與摩擦力。

2-3 (　　)10. 假設力矩一定，力臂越大則所需的力　(A) 不變　(B) 越大　(C) 越小　(D) 不一定。

(　　)11. 對於力矩問題之描述，下列何者爲不正確？　(A) 若施力作用線與轉軸平行時，則物體將產生轉動　(B) 若施力作用線通過物體之轉軸時，則物體不產生轉動　(C) 使物體產生力矩之施力作用點，若沿施力作用線上任意移動，且保持施力大小及方向不變，則其對某點 (軸) 之力矩恆保持不變　(D) 任何力系之合力對任一點 (軸) 之力矩，等於力系中各分力對同點 (軸) 之力矩和。

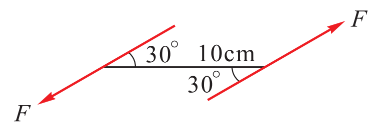
(　　)12. 下列與力矩相關的敘述，何者錯誤？　(A) 力矩的單位爲 N/m^2　(B) 轉動扳手爲力矩所生之效應　(C) 力矩之力臂是指力矩中心至力之垂直距離　(D) 力矩之大小，是由力與力臂決定。

2-4 (　　)13. 力偶對物體之外效應影響因素中，下列何者不正確？　(A) 力偶之作用點　(B) 力偶旋轉方向　(C) 力偶作用面之方位　(D) 力偶矩之大小。

(　　)14. 下列有關力偶轉換的敘述，何者錯誤？　(A) 若力偶的大小與方向不變，力偶的二平行力與其力偶臂可任意變更　(B) 力偶可在其作用平面上任意移動或旋轉　(C) 力偶可任意移至與原作用平面平行之平面上　(D) 力偶的作用面可任意改變。

(　　)15. 將平面上之 F 力分解爲一單力 P 及一力偶 C，則下列敘述何者有誤？　(A)P 與 F 著力點相同　(B)P 與 F 著力點不同　(C)P 與 F 方向相同　(D)P 與 F 大小相等。

(　　)16. 如右圖所示，力偶矩爲 500N-cm，則 F 爲　(A)50N　(B)100N　(C)150N　(D)200N。



(　　)17. 下列有關力偶之敘述，何者錯誤？
(A) 力偶是向量，可適用向量之加法法則　(B) 力偶矩之單位與力矩之單位相同　(C) 力偶矩之大小隨力矩軸中心位置之移動而改變　(D) 任一力偶可以在同一作用面內以任意等值力偶代替之。

(　　)18. 同平面內之一單力及一力偶的合力爲一單力。若原有力偶之力偶矩爲 $P\ell$ N-m，則此單力對原有單力作用點的力矩爲多少 N-m？　(A) $\frac{P\ell}{2}$　(B)$P\ell$　(C) $\frac{3P\ell}{2}$　(D)$2P\ell$。

(　　)19. 關於力偶矩之特性，下列敘述何者不正確？　(A) 欲使原力偶矩之大小維持不變，若產生力偶矩之二力變小，則其力偶臂需變大　(B) 力偶矩可於其作用平面上任意移動　(C) 力偶矩爲大小相等、方向相反及作用於同一直線上的二力所形成　(D) 力偶矩是一種向量。

2-5 (　　)20. 在同平面平行力系中以圖解法求合力，如力的多邊形封閉，而索的多邊形不封閉時，其合成爲　(A) 一力偶　(B) 一力　(C) 零　(D) 一力及一力偶。

(　　)21. 同平面平行力系中，求合力作用線之位置，係利用 (A) 力之可傳性原理 (B) 平行四邊形原理 (C) 正弦定理 (D) 力矩原理。

(　　)22. 兩個同指向而大小不等之平行單力的合力位置 (A) 在較大單力之外側 (B) 在這兩個單力之間 (C) 在較小單力之外側 (D) 視此兩個單力合力大小而定。

(　　)23. 大小相等、方向相反且作用點不同之二平行力，合力的作用點位置應在 (A) 兩力之內且靠近較小力側 (B) 兩力之內且靠近較大力側 (C) 較大力之外側 (D) 較小力之外側。

(　　)24. 同平面平行力系，若諸力之代數和為零，則 (A) 必共點 (B) 必平衡 (C) 合成必為零 (D) 若不平衡，合成必為一力偶。

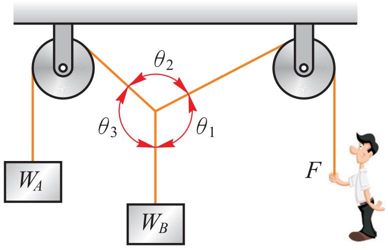
(　　)25. 利用圖解法求同平面共點力系中，若所得之力的多邊形為閉合時，表示 (A) 合力為一力偶 (B) 合力為一單力 (C) 合力為一單力及一力偶 (D) 合力為零。

(　　)26. 下列何者不屬於二力構件之平衡條件？ (A) 作用在同一直線上 (B) 方向相反 (C) 作用在同一點上 (D) 大小相等。

(　　)27. 三力在同一平面成平衡時，則此三力之作用線必 (A) 若不平行則必相交於一點 (B) 相交於兩點 (C) 相交於一點 (D) 平行於兩點。

(　　)28. 平面同點力系之平衡方程式應有 (A) 一個 (B) 二個 (C) 三個 (D) 四個。

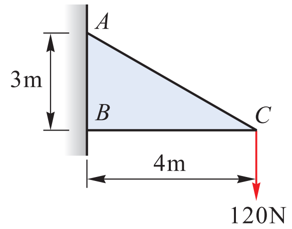
(　　)29. 如下圖所示，一人以 F 力量拉住繩，使 A、B 物體處在靜止狀態，若 $\theta_3 > \theta_1 > \theta_2 > 90°$，則下列何者正確？ (A)$W_B > W_A > F$ (B)$W_A > W_B > F$ (C)$F > W_B > W_A$ (D)$W_B > F > W_A$。



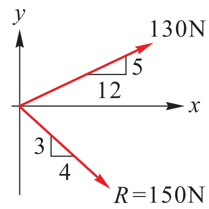
(　　)30. 對於同平面非共點非平行力系之合成，下列敘述何者正確？
(A)$R=\Sigma F=0$，$\Sigma M_O=0$，合成處於平衡狀態　(B)$R=\Sigma F=0$，$\Sigma M_O\neq 0$，合成為一力　(C)合力作用線位置可由力的可傳性求得　(D)$R=\Sigma F\neq 0$，合成為一力偶。

二、計算題

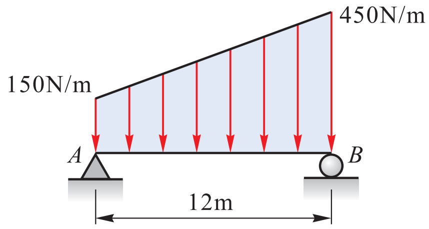
2-1　1. 如下圖所示，試將 120N 之力分解成沿 AC 及 BC 方向之兩個分力 F_{AC}、F_{BC}。



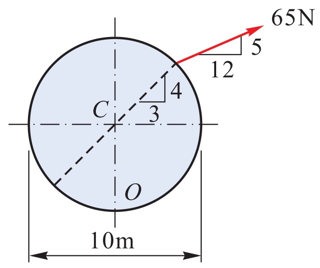
2. 如下圖所示，$R=150$N 係二力之合力，其中一力為 130N，試求另一力為多少？



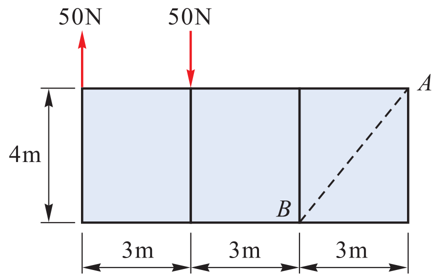
3. 如下圖所示，試求桿件所受之合力大小與距 A 點之距離。



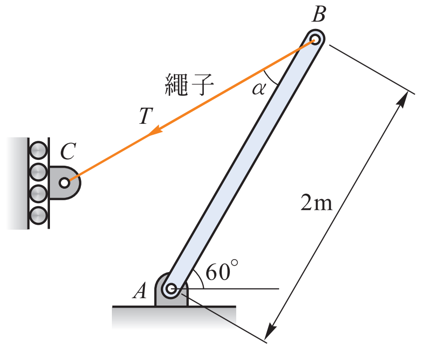
2-3 4. 如下圖所示，試求 65N 之力對 O 點之力矩為多少？



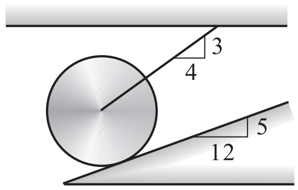
2-4 5. 如下圖所示之力偶，若轉換為通過 A、B 二點之等值力偶，試求作用於 A、B 二點之力其最小應為多少？



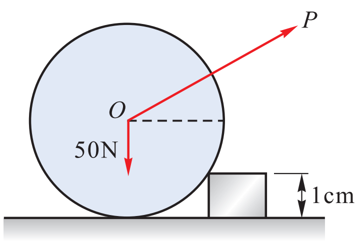
2-5 6. 如下圖所示，AB 為均質桿件，長度為 2m，重量為 2kN，假設繩子之角度 α 可以改變，而 AB 桿與水平 60° 夾角不變，試求繩子之最小張力 T 及角度 α 各為多少？



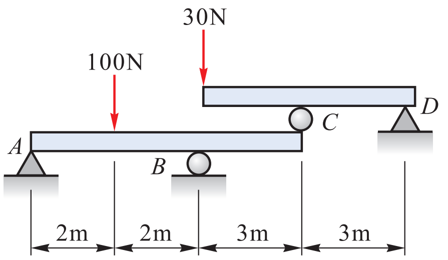
7. 如下圖所示，圓柱重 252N，靠於一光滑斜面上並用一繩繫之以防滾落，試求繩之張力爲多少？



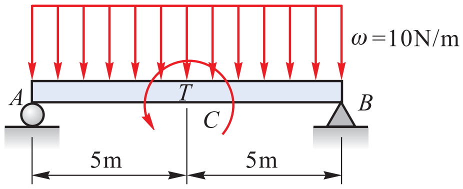
8. 如下圖所示，一輪之直徑爲 5cm，重 50N，欲使輪超越擋塊時，最小施力 P 爲多少？



9. 如下圖所示之組合樑，試求 A、B 點之反力？



10. 如下圖所示，若樑受到一均佈負荷 $\omega = 10\text{N/m}$，且於 C 點有一力偶 $T = 2500\text{N-m}$ 作用，試求 A、B 點之反力。



筆記本